

曲面のキルト分解の変換のなす亜群の表示

沢村弘昌（星くず算数・数学教室）

2026 年 10 月 12 日

自己紹介

湧沢弘昌（ふちざわ・ひろまさ）

栃木県宇都宮市生まれ（50 歳）

東大理学部数学科卒業、東大数理修士課程修了、博士課程単位取得退学（位相幾何学）

名古屋中学校・高等学校の数学科教諭をへて、4 年前に独立
現在、星くず算数・数学教室の講師

はじめに

2001 年 3 月に、東大数理に修士論文 ([F1]) を提出した直後に大きな病気となり、その修士論文は出版されることなく数年後に単位取得退学しました。

[F1] H.Fuchizawa, Quilt decompositions of surfaces and Torelli group action on the extended Hatcher complex, master's thesis, the Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, 2001

紆余曲折を経ましたが、昨年末から、その修士論文を出版しようとしています。今年3月には、当時の指導教官の先生と二十年ぶりにつながり直し、その修士論文はいまだに出版する価値があると知りました。

[F1] をまとめた今回の論文が [F2] です。

[F2] H.Fuchizawa, Quilt decompositions of surfaces and Torelli group action on the extended Hatcher complex, arXiv preprint arXiv:2603.02974, 2026

([F1] が修士論文そのもの。[F2] が今回の論文。題は同じ、内容も本質的に同じ、ただ、説明がより詳細になりました。以下、基本的に [F2] にだけ触れます。)

[F2] はこのたび一応完成し、2026 年 9 月 4 日、arXiv に公開されました。

今回は、この論文がたどった経緯等も、物語調で交えながらの発表としたいと思います。

また、予備知識として、「群」「群の表示」「セル複体」「イソトピー（ホモトピー）」「基本群（単連結）」等をご存じだとより分かりやすいですが、これらの知識がまったくなくても、絵で説明することによって、主たる結果（本講演の「定理1」と「定理2」）は、直感的な説明が可能だと思いますので、そのような発表としたいと思います。

本講演で、上の用語（あるいはもっと専門的な用語）を予告なく使う場面があると思いますが、その場合はご存じない方はそのまま聞き流してくださって大丈夫です。あとから説明を加えます。

[F2] の後半の「定理 3」の説明には、どうしても群やホモロジーの知識が要ります。定理 3 は簡単に直感的に触れるに留めます。

目次

1. 回想（１）（この１年くらいの回想）
2. 回想（２）（修士課程入学の 1999 年からの回想）
3. 数学的な話
4. 終わりに

1. 回想（1）（この1年くらいの回想）

2025年10月、インターネットで東北大の長谷川浩司先生と出会いました。

ほとんどの人に言ったことのなかった、幼少期から高校生くらいまでの数学的な体験の話をさせていただいたら、大変驚かれました。

（中学のとき、4次元と言うものがあることに気づいた。2直線の位置関係は、2次元だと（1）ぴったり重なる、（2）1点で交わる、（3）平行、の3種があり、3次元だとこれに（4）ねじれの位置、が加わるが、4次元にいくとこれに何が加わるかと考えた。よく考えて、もう増えないと気づいた。また、高校で微分の考えを習ったとき、その逆の計算をすると面積や体積が計算できることに気づき、円錐の体積は円柱の体積の $1/3$ 、一般に n 次元錐の体積は n 次元柱の体積の $1/n$ と計算できた等）

当時出版できなかった修士論文を出版したいとも申しましたが、応援してくださるとおっしゃってくださいました。

お書き頂いたエピソードから、先生が数学における創造性を早くからお持ちだったのは間違いないかと思います。

n 次元錐の体積やねじれの位置など、問を立てることすらなかなか初学者では辿りつかないものだと思います。問を立てる能力こそ研究には必要なこと、そのためには数学的自然についての感覚が必要なことなど、先生も御承知かと思いますが、教えられる以前に概ね理解されていたのではないのでしょうか。

(中略)

修士論文の内容を世に出すことをお考えとのこと、有意義であり引用されるべき場面も末永くあるのではと思いますし、実はそれ以前に子供時代からいろんな段階でご自身が問われお気づきになった事実のいろいろについても、できればまとめていただけると大変面白く貴重な読み物になるかもしれません。(X、2025年11月7日)

それで幼少期から高校生くらいまでの記憶について、執筆を始めました。少しずつ書いて、教室ホームページに少しずつ公開しました。（昨年11月から今年2月くらいまで。）

今年の2月、すうがく徒のつどいに応募させていただきました。
2026年3月20日、千葉大学で、

「小中高生のころ習う前に気がついていたこと～4次元における
正多面体、微分積分学の基本定理、ガウス＝ボンネの定理」

という題でお話をさせていただきました。（二日間開催の初日）

長谷川先生もオンラインで参加され、コメントをくださいました。

夜の食事会で、隣に座られた方は、私と同じ時間帯に講演をされた方でした。聞かれるままに、その日の話のダイジェストを、5分でお話しいたしました。

大きな関心をお持ちいただきました。これらの話を、大学・大学院でしたことのなかった私は、これらの話が食事の席で通じることに感動していました。

あとお二人、この食事の席で、聞かれるままに同じダイジェストをお話ししました。三人目の方に、その後どうなったかたずねられ、修士論文は当時病気で出版できていないが、出版したいと思っていると申し上げますと、その方は、また「すうがく徒のつどい」でお話してくださいとおっしゃってくださいました。

二日目は疲れ、オンラインで拝見していました。

実は、初日（20日）の午前中、長谷川先生はメールをくださっており、21日、22日と、私の当時の指導教官であった河野俊丈先生に研究集会で会うということと、修士論文の出版のことで、先生にお話ししましょうかということをおっしゃってくださっていたのでした。

私は勇気を出し、河野先生によろしくお伝えくださいと返信しました。

翌日の朝、長谷川先生から返信があり、河野先生は私を覚えておられ、私が修士論文を出版したいと考えていることを長谷川先生から聞かれ、それはよいことだというご反応であったとのことでした。

私は勇気を出し、その日、会場である東大数理に行きました。

二十年ぶりに河野先生にお会いしました。先生はお変わりなく、
修士論文の出版は前向きに検討してくださいとおっしゃいました。

長谷川先生と生で初めてお目にかかり、論文執筆のポイントなど
をおうかがいしました。

このときから私は修士論文をまとめた論文の執筆を本格的に始めました。次の「すうがく徒のつどい」で発表できることを目標に置いて、書いて来たという次第です。

次に、修士課程に入った 1999 年に話を戻します。

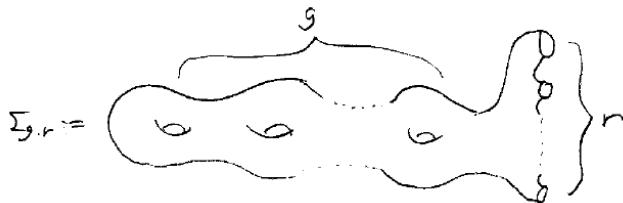
2. 回想（2）（修士課程入学の1999年からの回想）

1999年、学部で1年余計にいて23歳だった私は、河野先生のセミナーに入りました。

最初に与えていただき勉強して発表したのは、Hatcher-Thurstonの、曲面の写像類群の表示を求めた（求める道筋を与えた）、1980年（当時で19年前）の偉大な論文でした。

$\Sigma_{g,r}$ と書き、種数 (genus) が g 、境界の個数が r であるような曲面 (surface) とする。

$\Sigma_{g,r}$: 曲面 $g = \text{genus}$, $r = \# \text{boundary comp.}$



図のように、 g 人乗りの浮き輪に、 r 個の穴があいたものである。

以下に、専門用語や、定義されていない用語がたくさん出ますが、まだ回想シーンであり、数学的にちゃんとした説明はあとでなされます。

回想シーンとはいえまったく数学の話をしないわけにもいかず、ここではやや感覚的で厳密でない話が続きます。
おゆるしてください。

Hatcher-Thurston は、以下の曲面上の構造（のイソトピー類）を cut system と呼んだ。

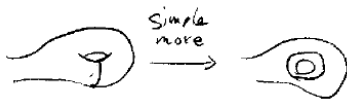


ここだけ $r=0$ を仮定。曲面上の g 個の「まる」（単純閉曲線、simple closed curve）の集まりで、そこで曲面を切ると、 $2g$ 個穴あき球面（0 人乗り浮き輪）になるもの。

図は $g=4$ の例。

cut system は、曲面上に無数にある。

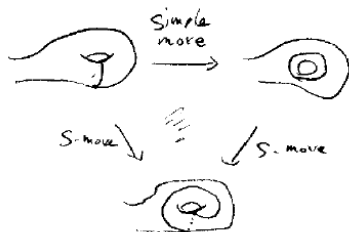
cut system を「頂点」(0-cell) と考え、以下の、simple move という、2つの cut system 間の動きを、「辺」(1-cell) と考える。



(上の左右の2つの絵はいずれも cut system。曲面の一部分だけかいており、見えていないところは変化がない。)

これで、この頂点と辺でできたもの(複体、complex)は、連結となる。つまり、あらゆる2頂点(2つの cut system)は有限個の辺(simple move)でつながっている。つまり、あらゆる2つの cut system は、有限回の simple move で移り合うことを主張している。

以下に、3つの cut system 間の、3つの simple move の絵を見せる。ここに三角形の「面」(2-cell)をはる。



あと、四角形と五角形の 2-cell が定義される。

これで、この 2 次元セル複体 (2-cell complex) は単連結になる、というのが Hatcher-Thuston の定理である。

(つまり、cut system から cut system へ、いくつかの simple move で行くときの「違う行き方のパターン」をすべて数え上げた。)

「単連結」についてはあとで説明します。

証明は Cerf 理論を使う。Cerf 理論とは「動くモース理論」みたいなもの。

ここから具体的に曲面の写像類群の表示が計算できる。
Harer(1982) によるこの複体の改良を経て、Wajnryb(1983) が、曲面の写像類群の生成元である Humphries generators に対して relations を書いた。

この論文の紹介が首尾よくできた私に、河野先生は、Funar-Gelca、Bakalov-Kirillov という当時のプレプリントをくださいました。また、そのころ、東大のトポロジー火曜セミナーで、中村博昭先生の 90 分のお話を聴きました。また、中村博昭先生から、Hatcher(-Lochak-Schneps) のプレプリントを教えていただきました。

これらを整理すると、以下のようになります。

先ほどの Hatcher-Thurston の付録に、頂点を曲面のパンツ分解（すぐあとで述べます）にしても同じように連結かつ単連結な 2 次元セル複体が作れると示唆してあります。

当時、示唆だけなのは、応用がなかったからで、それから 19 年後の 1999 年、それらが応用されるような研究がいろいろなされており、それらが、Nakamura-Schneps、Funar-Gelca、Bakalov-Kirillov などなのだそうです。

「連結かつ単連結」という言い回しについて

「連結かつ単連結」という言い回しについて、「単連結なら当然連結だけど？」と思われるかもしれません。
確かにそうで、「単連結」とだけ言えばいいところです。

ここでは

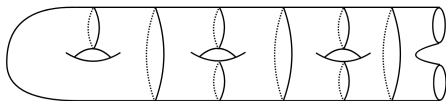
連結 … 生成元がそれで足りている

単連結 … リレーションがそれで足りている

というニュアンスで「連結かつ単連結」という言い回しをしています。

曲面のパンツ分解

以下の図のようなものを、曲面のパンツ分解 (pants decomposition of a surface) という。



上の図が、 $g = 3, r = 2$ の曲面のパンツ分解の例。下の図がパンツ (a pair of pants)、すなわち、3つの穴のあいた球面。パンツに見えますか？

Funar-Gelca(1999) と Hatcher-Lochak-Schneps(2000) は、それぞれ、いずれも Hatcher-Thurston の付録のアイデアにより (Cerf 理論を使う)、曲面のパンツ分解を 0-cell とし、2つのパンツ分解間の2種類の move を 1-cell とし、5種類の 2-cell のある、連結かつ単連結な 2-cell complex を作った。

両者は同じ証明だが、動機が違う。前者は数論的な興味 (Belyi の定理) から、後者は位相的量子場の理論 (TQFT) から。

これらの研究の背後にある動機

※ 本日の講演で、この研究にどのような動機があるかと思われると思いますが、いろいろあるわけです。

当時から現在に至るまで、私はこの研究の背後にある動機について詳しくなく、本日、動機の話はここまでにさせていただきます。

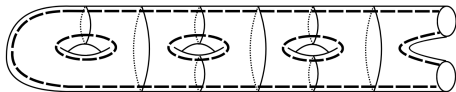
この Hatcher-Lochak-Schneps, Funar-Gelca の定理を「定理 0」と呼ぶことにする。あとでより詳しく説明する。

この複体を、Hatcher complex と呼ぶ。

これを「曲面のパンツ分解の変換のなす亜群の表示がある」というふうに言うことにする。

曲面のキルト分解

Nakamura-Schneps は、曲面のキルト分解 (quilt decomposition of a surface) を定義した。



図のように、曲面のパンツ分解に「ぬいめ」をつけたようなものである。

Nakamura は、1999 年 6 月 22 日の東大のトポロジー火曜セミナーで、extended Hatcher complex を定義した。

曲面のキルト分解を 0-cell とし、2 つのキルト分解の間の 3 種類の move を 1-cell とし、6 種類の 2-cell がある。

定理 1 extended Hatcher complex は連結かつ単連結である。

この定理 1 の中村先生と別な証明をしました。

中村先生は未出版です。

（私も未出版であるわけで、このたび出版をがんばりたいです。）

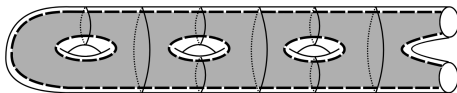
Funar-Gelca は、曲面の rigid structure と呼ばれるものを頂点とする連結かつ単連結な 2-cell complex を作った。

Bakalov-Kirillov は、曲面の “marking” と呼ばれるものを頂点とする連結かつ単連結な 2-cell complex を作った。

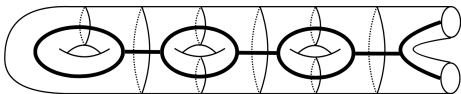
これに関連して、以下のものを定義した。

曲面の色つきキルト分解

曲面の色つきキルト分解 (colored quilt decomposition of a surface) を定義する。



図のように、曲面のキルト分解の片面に色をつけたようなものである。



図のように、パンツ分解の各パンツに「Yの字」を埋め込んだものとも考えることもできる。

colored extended Hatcher complex を以下のように定義する。

曲面の色つきキルト分解を 0-cell とし、2つのキルト分解の間の4種類の move を 1-cell とし、8種類の 2-cell がある。

定理 2 colored extended Hatcher complex は連結かつ単連結である。

Funar-Gelca の rigid structure、Bakalov-Kirillov の marking は、colored quilt decomposition を単純化したものと思えます。したがって FG、BK と似た結果になることが期待されますが、実際に似た結果となります。

少し違う結果となります。次にお見せする表のように、2-cell で、FG、BK にないものが、私のにはあります。

$\overline{H}(\Sigma_{g,r})$	$\Gamma(\Sigma_{g,r})$ in [FG]	$\mathcal{M}^{\max}(\Sigma_{g,r})$ in [BK]
S	S	S
A	F	A
T	T	T^{-1}
B'	B	B

Table 1: Correspondence between the 1-cells of $\overline{H}(\Sigma_{g,r})$ and those of $\Gamma(\Sigma_{g,r})$ in [FG] and $\mathcal{M}^{\max}(\Sigma_{g,r})$ in [BK]

左の、 $\overline{H}(\Sigma_{g,r})$ が colored extended Hatcher complex です。

B' は B とまったく同じではないが、 B で作られる complex の 1-skeleton は B' で作られる complex の 1-skeleton とホモトピー同値という意味で等価である。

(余談：合唱に見える)

$\overline{H}(\Sigma_{g,r})$	$\Gamma(\Sigma_{g,r})$ in [FG]	$\mathcal{M}^{\max}(\Sigma_{g,r})$ in [BK]
5A	3-a)	Pentagon axiom
3A	3-b)	Hexagon axiom
3S	3-c)	(4.16) of Relation for $g = 1, n = 1$
6AS	3-d)	Relation for $g = 1, n = 2$
2S	2-b)	(4.15) of Relation for $g = 1, n = 1$
2A	—	—
2B'3T	1-b)	—
DC	DC	Commutativity of disjoint union

Table 2: Correspondence between the 2-cells of $\overline{H}(\Sigma_{g,r})$ and those of $\Gamma(\Sigma_{g,r})$ in [FG] and $\mathcal{M}^{\max}(\Sigma_{g,r})$ in [BK]

ここまでだいたい M1 の 12 月までにできましたので（正確にはそのときの証明には gap があり、M2 のときに補うことができました）、河野先生にご報告をしました。

次に私が向かった研究の対象は Torelli 群という、曲面の写像類群のある正規部分群でした。これが M2 のときの研究です。

少し専門用語が続きます。

曲面の写像類群とは、曲面の向きを保つ自己同相写像のイソトピー類がなす群です。

曲面の写像類群の元のうち、曲面の 1-homology を動かさないものの全体が部分群をなします。これを Torelli 群と言います。

この Torelli 群の定義を読んだ瞬間にひらめいたことがあるのです。

Torelli 群は colored extended Hatcher complex に freely に作用する！

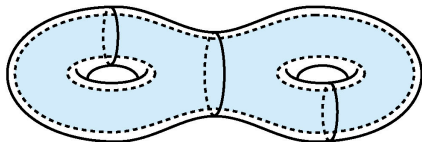
この直観を少しご説明します。

Torelli 群 $\mathcal{I}_{g,r}$ が colored extended Hatcher complex $\overline{H}(\Sigma_{g,r})$ に free に作用するとは、以下の意味です。

任意の $f \in \mathcal{I}_{g,r}$ と 任意の点 $x \in \overline{H}(\Sigma_{g,r})$ に対して、
 $f(x) = x$ ならば $f = 1$ が成り立つ。

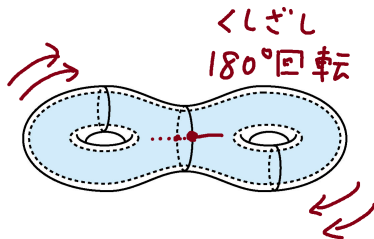
この命題の「逆」はすぐに説明できるので、それをお見せします。

x を colored extended Hatcher complex の頂点とします。つまり、 x は colored quilt decomposition です。



上の図は、 $g = 2, r = 0$ の曲面の上の colored quilt decomposition の例です。

図のように、「くしざし 180° 回転」する曲面の自己同相写像を f とします。 f はこの色つきキルトを明らかに変えないので、 $f(x) = x$ です。



しかし、 f は明らかに曲面の 1-homology を動かしており、 f は Torelli 群の元ではありません。

この逆が言えるという直観です。

この直観に基づく elementary な証明をしました。

これが言えると何が嬉しいかと言いますと …

当時、Torelli 群の表示は得られていませんでした。有限表示可能かどうかも知られていませんでした。
現在も未解決問題であるようです。

この結果は、Torelli 群の表示があることを示唆します。
なぜなら、colored extended Hatcher complex は単連結であり、これに Torelli 群が free に作用するので、colored extended Hatcher complex を Torelli 群の作用で割ると、基本群が Torelli 群で、2-cell (つまり relation) がすべてわかっている 2-cell complex となるからです。

この計算は当時やってみましたが、筋が悪いです（基本領域が大きすぎる）。

のちに、Torelli 群は torsion-free であること (Torelli 群の、何回かやって 1 になる元は 1 だけ) を知って、それを使った証明を修論には載せました (定理 3 の (1))。Torelli 群は extended Hatcher complex にも free に作用することが示せました (定理 3 の (2))。

今回、この定理 3 の (1) (2) は、写像類群の torsion-free な部分群で言えることに気づき、そのように [F2] には書きました。

もともとの Torelli 群が torsion-free であることを使わない証明は長く紛失したと思って来ましたが、今回（2026 年）、その証明を書いた当時のノートが古い段ボール箱から出て来ました。

これはもう一つの論文として準備中です。

定理 3 で先走ってしまいすみませんでした。定理 1、定理 2 はのちほどきちんと述べます。

いまは回想シーンの続きに戻らせていただきます。

ここまでがだいたい M2 であり、修士論文として 2001 年 1 月に東大数理に提出しました。

修論の発表会で、同じタイミングでトポロジーで修士論文を出した仲間からも感心され、また、博士課程の入学試験（これも修士論文の発表会）で先生方からも感心されたと思います。

しかし、このあと私は大きな病気になってしまいます。

D1 のころ考えたこともあるのですが、D1（2001 年）は病気がひどくなる一方でした。

2001 年 9 月 10 日にリーマン面研究集会で修論の内容について話しましたが、ひどい調子の中、発表しました。（同時多発テロの前日）

二年くらい大学院を休みました。

2003 年／ 2004 年ごろ、少し大学院に戻って数学をやろうとした時期があるのですが、もう以前のように頭は回転せず、苦しま日々でした。

2004 年の頭ごろ、佐賀大学の市川尚志先生という先生から論文 [I] が届きました。

(メールに添付するという技術のないころで、郵送です。)

[I] T.Ichikawa, Teichmüller Groupoids, and Monodromy in Conformal Field Theory, Commun. Math. Phys. 246, 1-18 (2004)

私の修士論文 [F1] が引用されていました。

M2（2000 年）の 9 月に大阪で、佐賀大（当時）の廣瀬進先生に、修論に興味をお持ちいただき、書けたらお送りすることになっており、書けたときに一部お送りしていたのでした。

そこから市川先生に渡り、市川先生が引用してくださったのでした。

（つい最近まで、私の修論は世界に数部しかないと思って来ましたが、おそらくそうではなく、ときどきコピーをお持ちの先生はいらっしゃいます。）

これを受けて、中村博昭先生（当時、岡山大学）に、2004 年 11 月 25 日に、岡山大学で、修論に関する 120 分の講演をするようご招待をいただきました。

私の講演を聴かれた中村先生から、出版するようお励ましのお言葉をいただきましたが、当時すでに、数学の研究で生活することをあきらめていた私は、[F1] を出版することなく、2006 年 3 月に、単位取得退学し、研究の世界を去ってしまいます。

長い年月が過ぎ、冒頭に述べた、2025 年の長谷川先生との出会いとなるわけです。

当時の先生方が私を覚えていてくださり、当時と変わらず、私に親切にしてくださるのをありがたく思っています。

このたび、論文が仕上がり、中村先生や市川先生にもお送りすることができました。

あるベテランの先生は、今回の私の話を聞かれ、興味を持ってくださり、来年の頭ごろ、その先生の前でお話をさせていただくことになりました。

回想はこのへんまでで、ようやく数学の話となります。
定理0 ([HLS][FG]) と、定理1、定理2のお話をいたします。

3. 本題

定理0	パンツ分解	Funar-Gelca,Hatcher-Lochak-Schneps
定理1	キルト分解	Nakamura, F
定理2	色つきキルト分解	Funar-Gelca,Bakalov-Kirillov,F

定義 0 (Hatcher complex) [HLS][FG]

0-cell 曲面のパンツ分解

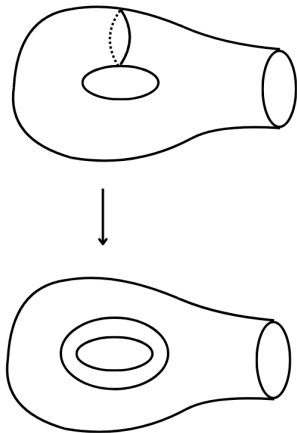
1-cell S-move と A-move の、2 種類の move

2-cell ある 5 種類の 2-cell

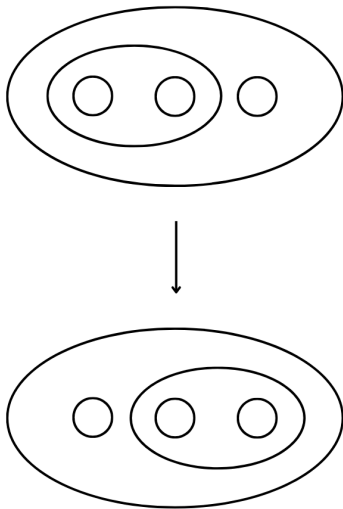
定理 0 [HLS][FG]

Hatcher complex は連結かつ単連結である。

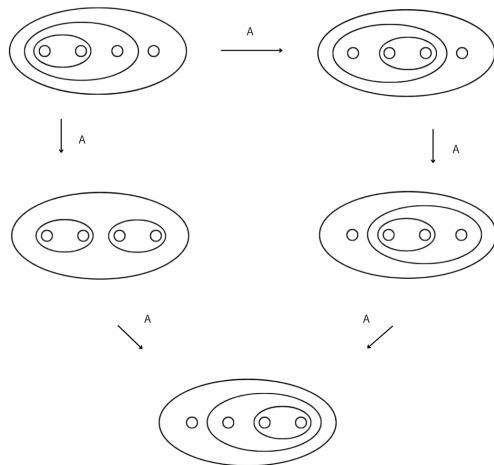
S-move



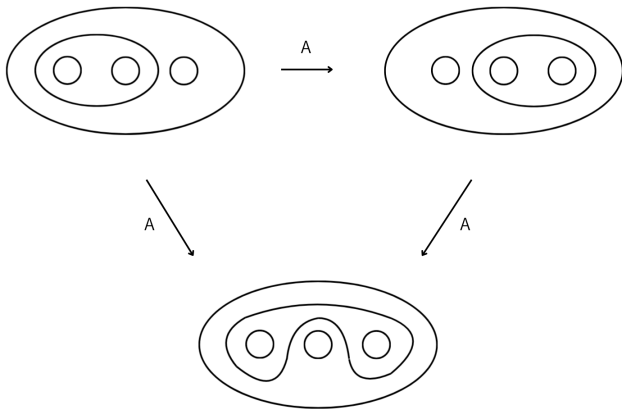
A-move

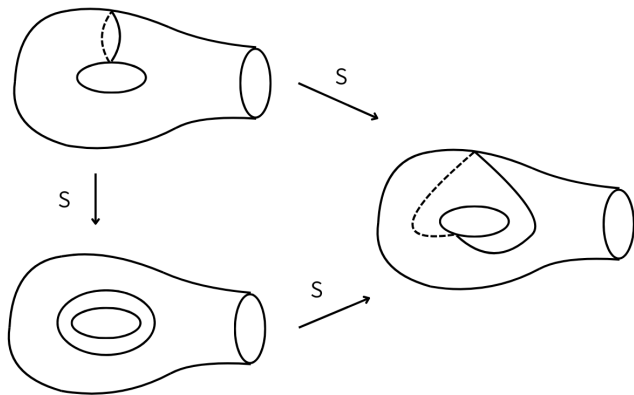


5A

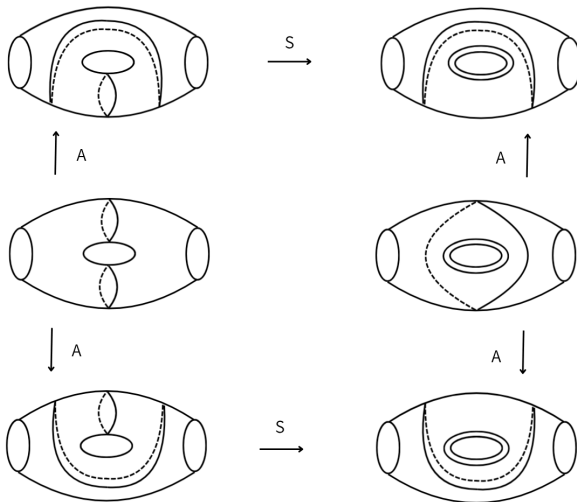


3A

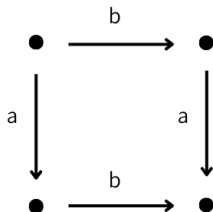




6AS

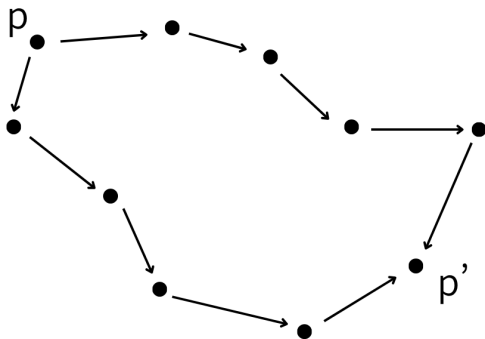


DC (disjoint commutativity)



a と b は両方とも move で、動いている部分が重なっていない (disjoint である)。

「違う行き方」(「単連結」の説明)



定義 1 (extended Hatcher complex) (Nakamura)

0-cell 曲面のキルト分解

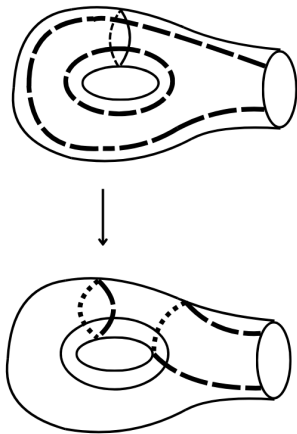
1-cell $\tilde{S}$ -move と $\tilde{A}$ -move と、half twist $D^{1/2}$ の、3種類の move

2-cell ある 6 種類の 2-cell

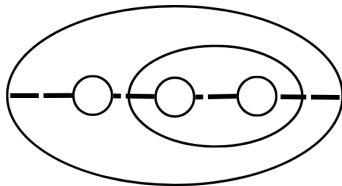
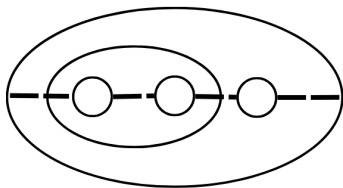
定理 1 (Nakamura)(F)

extended Hatcher complex は連結かつ単連結である。

$\tilde{S}$ – move

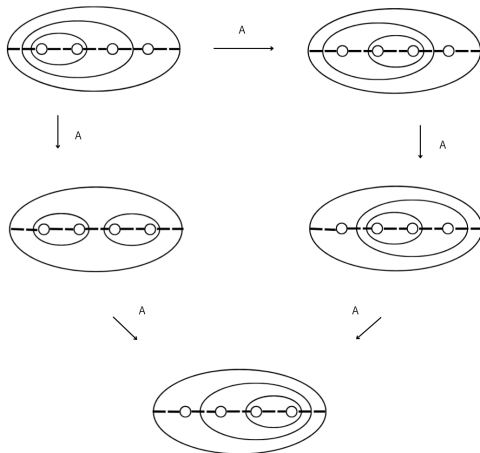


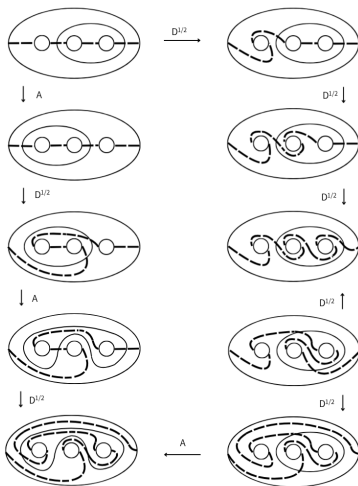
$\tilde{A}$ – move

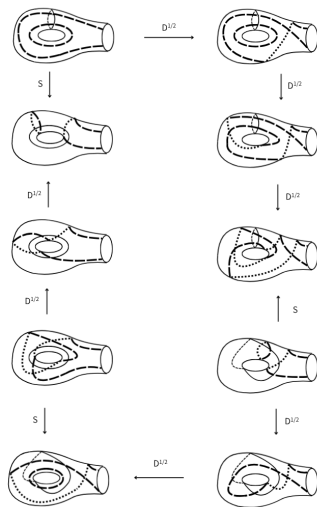


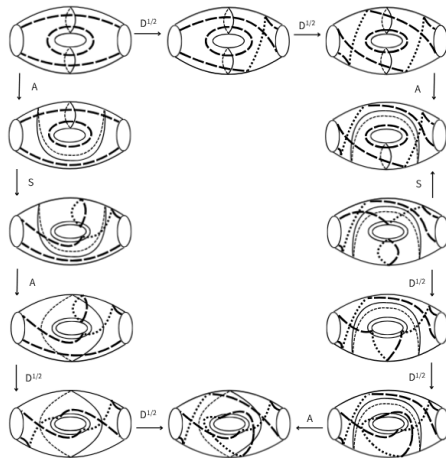
half twist $D^{1/2}$

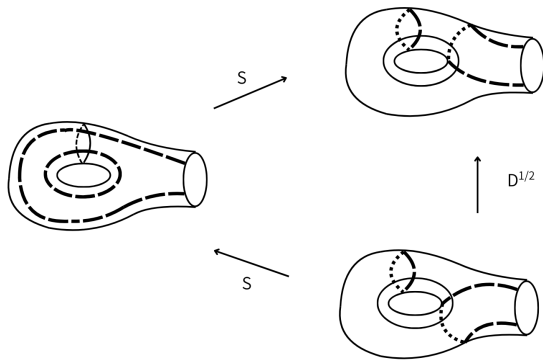






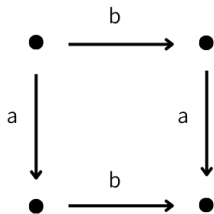






Nakamura 先生は back-tracking triangle for $\widetilde{S}$ -move と呼んでいる。

DC



証明

Hatcher complex の単連結性と、Bakalov-Kirillov lemma というものを使う。

Bakalov-Kirillov lemma の証明は、BK 自身が omit しているくらい elementary

Hatcher-Lochak-Schneps（実質的に BK lemma を使っている）のアイデアに基づく BK lemma の証明を [F2] に載せている。

定理 1 の証明の概略

extended Hatcher complex $\tilde{H}(\Sigma)$ の 1-skeleton から、Hatcher complex $H(\Sigma)$ の 1-skeleton への写像 $\pi : \tilde{H}(\Sigma)^{[1]} \rightarrow H(\Sigma)^{[1]}$ を以下のように定義する。

(1-skeleton とは、その複体の、0-cell と 1-cell だけを考えてもの。)

$\pi|_{\tilde{H}(\Sigma)^{[0]}}(q)$ を、 q がそのキルトを忘れたパンツ分解とする。 π は 1-cell 上に自然に伸びる。

Bakalov-Kirillov lemma

$\mathcal{M}, \mathcal{C}$: 2-cell complex

$$\pi : \mathcal{M}^{[1]} \rightarrow \mathcal{C}^{[1]}$$

$$(\pi(\mathcal{M}^{[0]}) \subset \mathcal{C}^{[0]})$$

が連続かつ全射で、次の4つが満たされているとする。

(1) $\mathcal{C}$ は連結かつ単連結

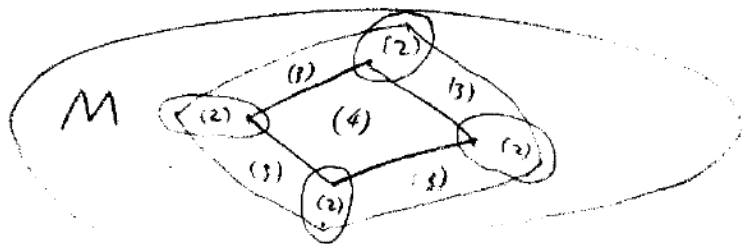
(2) 任意の 0-cell $c \in \mathcal{C}$ に対し、 $\pi^{-1}(c)$ は連結で、かつ、任意の $\pi^{-1}(c)$ のなかの closed edge path は $\mathcal{M}$ のなかで可縮

(3) $c_1 \xrightarrow{e} c_2$ を $\mathcal{C}$ の 1-cell とし、 $m'_1 \xrightarrow{e'} m'_2$ と $m''_1 \xrightarrow{e''} m''_2$ を 2 つの任意の e の $\mathcal{M}$ への lift とする。このとき、 $\pi^{-1}(c_1)$ 内の edge path e_1 と、 $\pi^{-1}(c_2)$ 内の edge path e_2 があって、以下の closed edge path は $\mathcal{M}$ 内で可縮

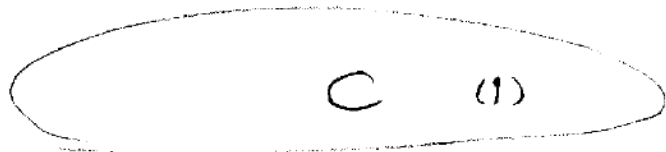
$$\begin{array}{ccc}
 m'_1 & \xrightarrow{e'} & m'_2 \\
 e_1 \downarrow & & e_2 \downarrow \\
 m''_1 & \xrightarrow{e''} & m''_2
 \end{array}$$

(4) $\mathcal{C}$ の各 2-cell X に対し、 ∂X の lift が $\mathcal{M}$ 内で可縮
このとき、 $\mathcal{M}$ は連結かつ単連結。

「説明」



$\downarrow \pi$



π に関して BK lemma を使う。

(1)-(4) の条件をチェックする。

(1) Hatcher complex は連結かつ単連結だから、よい。

(2) 任意の $p \in H(\Sigma)^{[0]}$ を取って固定。 p はパンツ分解。
パンツ分解 p の SCC を $c_1, c_2, \dots, c_{3g-3+2r}$ とする。
 p 上の任意のキルト分解 q を取って固定。
 Q を、 p 上の、 $c_1, c_2, \dots, c_{3g-3+2r}$ に沿った half twist が生成する
キルト分解のなす群 (q を単位元とする) とする。

主張 p 上のすべてのキルト分解は Q の元である。
証明 ていねいに論ずるとわかる。

写像 $f : \bigoplus^{3g-3+2r} \mathbb{Z} \rightarrow Q$ を以下で定義。

$$(t_1, t_2, \dots, t_{3g-3+2r}) \mapsto \{t_i \text{ times half twists on } c_i\}$$

f は明らかに homomorphism である。

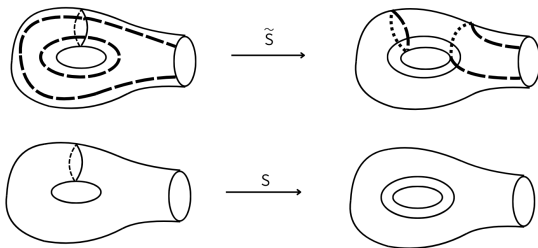
命題 f は isomorphism である。

証明 ていねいに論ずるとわかる。

ここで、 $\pi^{-1}(p)$ が連結かつ単連結であることを見ればよいが、 Q の Cayley graph は $\pi^{-1}(p)$ に等しく、その正方形にすべて DC セルがはってある状況であるから、(2) は OK。

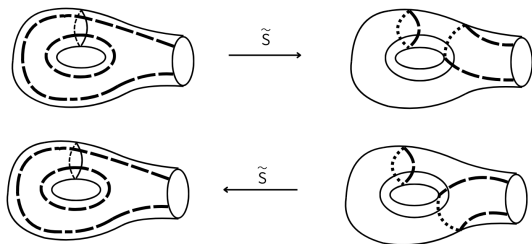
(3) S -move と A -move でチェックする必要がある。

S -move の $\tilde{S}$ -move への lift は、move の動いている部分の近傍で一意 ([NS] の lemma 7.3)。



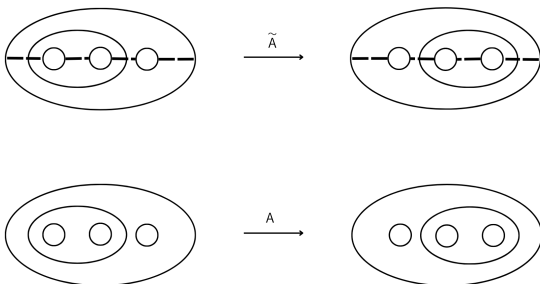
したがって、2種類の異なる lift があるとすれば、それは、move の動いている部分の近傍以外で起きる違いがあるのみであり、ここで可縮になるべき square は、いくつかの *DC* セルで可縮になっている。

あと一つチェックすべき点は、 S の inverse はまた S だが、 S の lift と S^{-1} の lift は異なるので、以下の2つの lift の違いがあること。



この 'square' は $2S$ で可縮になる。S-move のチェック終わり。

A-move の $\tilde{A}$ -move への lift は、move の動いている部分の近傍で一意的 ([NS] の lemma 7.3)。



S-move のときと同じ議論をする。

また、 A の inverse はまた A だが、 A の lift と A^{-1} の lift は一致するので、ここはさっきみたいな議論はいらない。

A-move のチェック終わり。

(4) $5A$ 、 $3A$ 、 $3S$ 、 $6AS$ 、 DC のときをチェックすればよい。
 $\widetilde{5A}$ 、 $\widetilde{3A}$ 、 $\widetilde{3S}$ 、 $\widetilde{6AS}$ 、 DC はそれらの lift になっている。
定理 1 の証明終わり。

定義 2 (colored extended Hatcher complex)

0-cell 曲面の色つきキルト分解

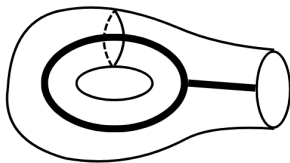
1-cell $\bar{S}$ -move、 $\bar{A}$ -move、 T -move、 B' -move の 4 種類の move

2-cell ある 8 種類の 2-cell

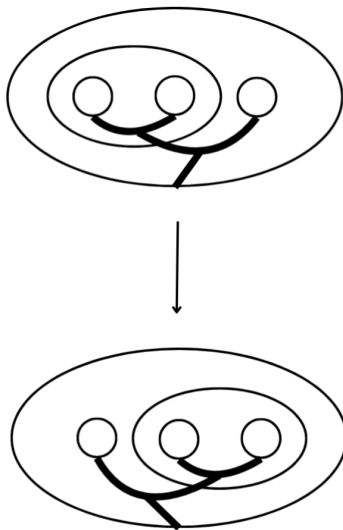
定理 2 (F)

colored extended Hatcher complex は連結かつ単連結である。

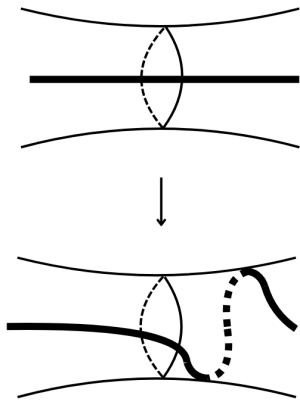
$\overline{S}$ – move



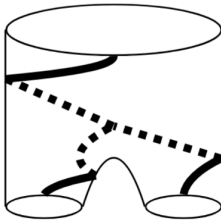
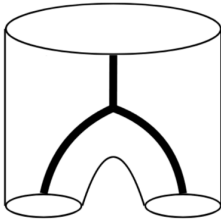
$\overline{A}$ – move

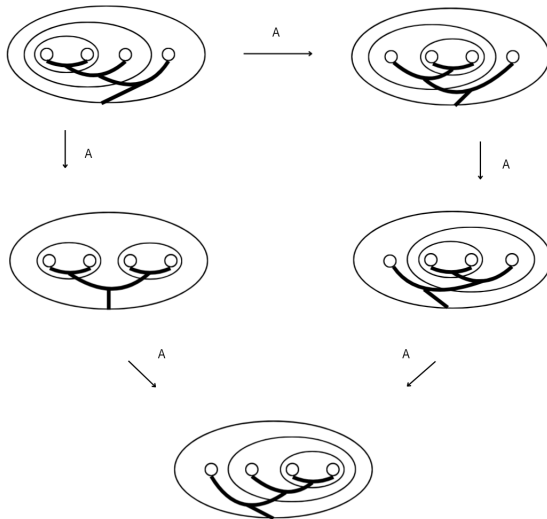


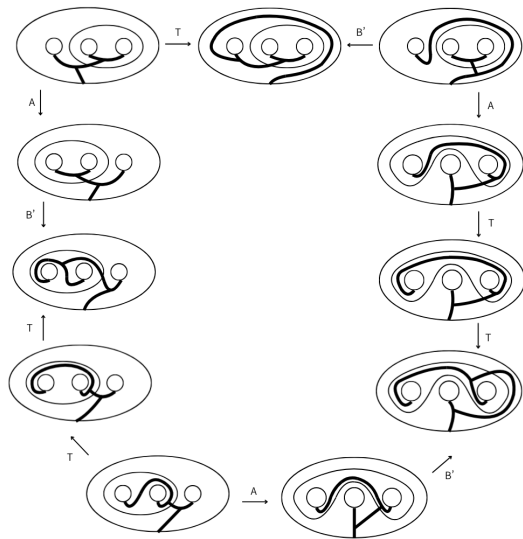
T-move

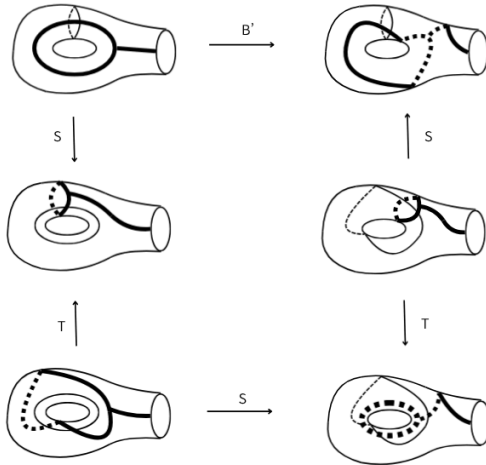


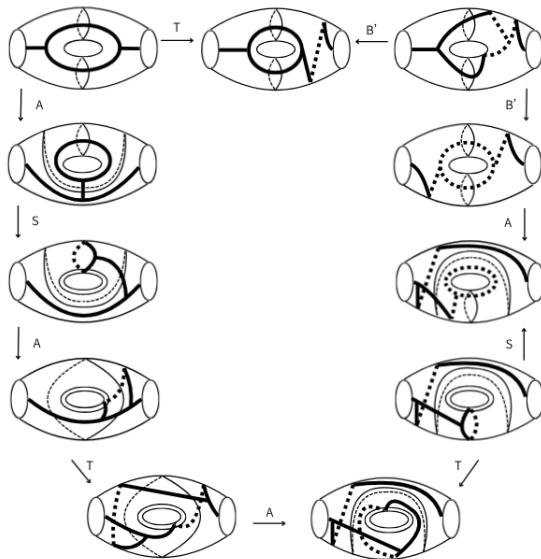
B'-move

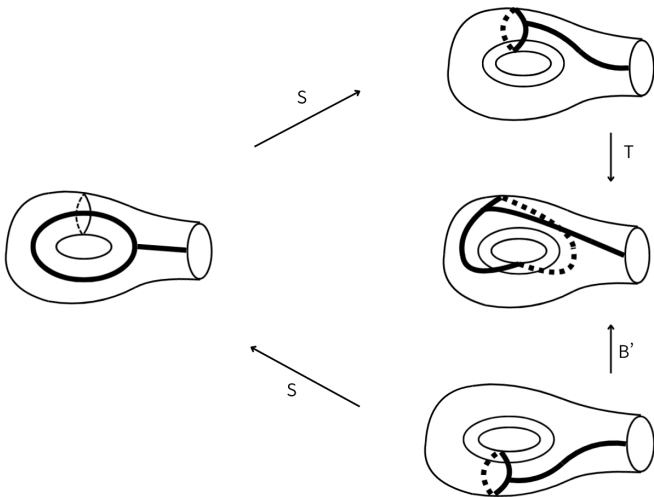




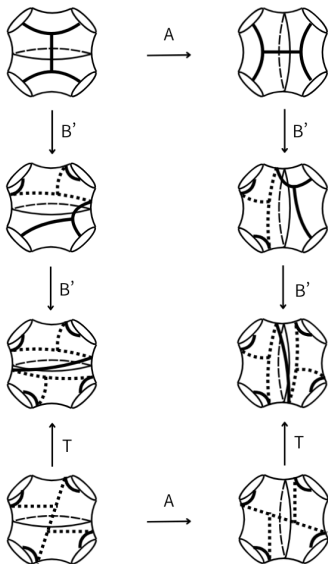




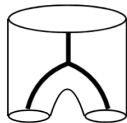




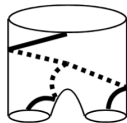
2A



2B'3T



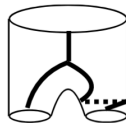
B' ↓



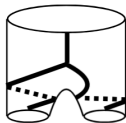
B' ↓



T ↘

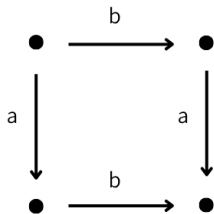


T ↓



T ↙

DC



証明

Hatcher complex の単連結性と、Bakalov-Kirillov lemma と、色つきキルト分解とキルト分解の関係を使う。

$\phi : \overline{H}(\Sigma)^{[1]} \rightarrow H(\Sigma)^{[1]}$ を以下のように定義する。

$\phi|_{\overline{H}(\Sigma)^{[0]}}(q)$ を、 q がその色つきキルトを忘れたパンツ分解とする。この写像 ϕ は 1-cell 上に自然に伸びる。

$\psi : \overline{H}(\Sigma)^{[0]} \rightarrow \tilde{H}(\Sigma)^{[0]}$ を以下のように定義する。

$\psi|_{\overline{H}(\Sigma)^{[0]}}(q)$ を、 q がその色だけを忘れたキルト分解とする。

ϕ に関して Bakalov-Kirillov lemma を使う。
あちこちで ψ を使う。

(1) Hatcher complex は連結かつ単連結だから、よい。

(2) ϕ の各点の逆像は単連結

ここで、 T は、 $D^{1/2} \circ D^{1/2}$ に対応することと、 B' は、そのパンツの各 SCC (3つ) の上で1回ずつ $D^{1/2}$ をすることに対応することを使う

$2B'3T$ を必要とする

随所で ψ を使う

(3) それぞれ S -move、 A -move の、 $\overline{H}(\Sigma)$ への lift は「二意」

$2S$ と $2A$ を必要とする

随所で ψ を使う

(4) 5A、3A、3S、6AS、 DC を必要とする

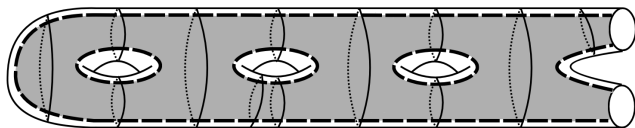
定理 2 の証明終わり。

修士論文に「やればできる」とだけ書いてやらなかったこと

FG、BK は、Moore-Seiberg (1989) のギャップを埋めようとして書いてある。

FG、BK の複体の 0-cell は、だいたい、以下に述べる「色つきキルト DAP 分解」と言われるようなもの。

色つきキルト DAP 分解



曲面を、disk（円板）と annulus（円環面）とパンツに分解し、
その上で色つきキルトを考えたもの。

当時の私は remark に、「この論文のやり方と同じようにしてできる」と書き、結論だけ書いています（必要になる 1-cell、2-cell を書いている）。

やればだれでも同じ結論に達すると当時思いました。
すっかりさえたところのなくなった現在の私には、ちょっと超えられないギャップです。

誰か手伝ってください。

4. 終わりに

「5分遅刻すると怒られるが、3時間遅刻すると喜ばれる」と言います。

3時間遅刻した人は、何か事故に巻き込まれたとされているので、無事に到着しただけでみんな喜ぶ、というわけです。

新約聖書に「放蕩息子のたとえ」という話が載っています。
父親の財産を生前贈与の形で受け取り、何日もしないうちに遠い
国に行って放蕩の限りを尽くし、財産を無駄遣いした息子が、食
うに困って父親のところに帰ると、父親は大喜びして迎えた、と
いう話です。

これも、ダメ息子は親の悩みの種だが、ここまでひどいと父親は
大喜びして迎える、という話だろうと思います。

このたび、25年遅れで宿題を出し、先生方が当時と変わらず私を迎えてくださっていることは、本当にありがたいことだと感謝しています。

どこかの論文雑誌への投稿、先ほど触れたもう一本の論文の執筆、等を今後の目標としたいと思います。

本日はご清聴ありがとうございました。