

# アルクビエレ・ドライブについて

しずめこみ

# 自己紹介

ハンドルネーム：しずめこみ

アカデミックでの所属：OMU(最近サイバー攻撃を受けた)

研究分野：Riemann 幾何、Lorentz 幾何、数理相対論

# 自己紹介

ハンドルネーム：しずめこみ

アカデミックでの所属：OMU(最近サイバー攻撃を受けた)

研究分野：Riemann 幾何、Lorentz 幾何、数理相対論

このトークは60分枠をもらっているが、たぶん30分ぐらいで終わりそうな気がする

# Abstract

メキシコ人の物理学者 Miguel Alcubierre(ミゲル・アルクビエレ) は人類の夢である超光速航法を真面目に考えた結果、現在アルクビエレ・ドライブと呼ばれる以下の時空計量を見つけた。

# Abstract

メキシコ人の物理学者 Miguel Alcubierre(ミゲル・アルクビエレ) は人類の夢である超光速航法を真面目に考えた結果、現在アルクビエレ・ドライブと呼ばれる以下の時空計量を見つけた。

$$g = -dt^2 + (dx - v_s(t)f_s(r_s(t, x, y, z))dt)^2 + dy^2 + dz^2$$

$$r_s(t, x, y, z) = \sqrt{(x - x_s(t))^2 + y^2 + z^2}$$

$$f(r_s) = \frac{\tanh(\sigma(r_s + R)) - \tanh(\sigma(r_s - R))}{2 \tanh(\sigma R)}$$

# Abstract

メキシコ人の物理学者 Miguel Alcubierre(ミゲル・アルクビエレ) は人類の夢である超光速航法を真面目に考えた結果、現在アルクビエレ・ドライブと呼ばれる以下の時空計量を見つけた。

$$g = -dt^2 + (dx - v_s(t)f_s(r_s(t, x, y, z))dt)^2 + dy^2 + dz^2$$
$$r_s(t, x, y, z) = \sqrt{(x - x_s(t))^2 + y^2 + z^2}$$
$$f(r_s) = \frac{\tanh(\sigma(r_s + R)) - \tanh(\sigma(r_s - R))}{2 \tanh(\sigma R)}$$

現在、超光速航法の理論はとても速く移動する方法とワームホールを使って時空をスキップする方法の2種類があるが、アルクビエレ・ドライブは前者である。

# Abstract

メキシコ人の物理学者 Miguel Alcubierre(ミゲル・アルクビエレ) は人類の夢である超光速航法を真面目に考えた結果、現在アルクビエレ・ドライブと呼ばれる以下の時空計量を見つけた。

$$g = -dt^2 + (dx - v_s(t)f_s(r_s(t, x, y, z))dt)^2 + dy^2 + dz^2$$
$$r_s(t, x, y, z) = \sqrt{(x - x_s(t))^2 + y^2 + z^2}$$
$$f(r_s) = \frac{\tanh(\sigma(r_s + R)) - \tanh(\sigma(r_s - R))}{2 \tanh(\sigma R)}$$

現在、超光速航法の理論はとても速く移動する方法とワームホールを使って時空をスキップする方法の2種類があるが、アルクビエレ・ドライブは前者である。本講演ではアルクビエレ・ドライブがなぜ超光速航法を表すのかを解説する。アルクビエレ・ドライブを作るのは現代物理の観点からは絶望的で、あくまで数学上の産物である。

# 仮定する知識

- Minkowski 時空
- 世界線
- 計量テンソル
- 測地線
- 固有時

# Minkowski 時空の復習

光速を  $c = 1$  とする。

Minkowski 時空は  $\mathbb{R}^4$  に座標  $\{t, x, y, z\}$  を入れて、計量を

$$g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

で定める。

# Minkowski 時空の復習

光速を  $c = 1$  とする。

Minkowski 時空は  $\mathbb{R}^4$  に座標  $\{t, x, y, z\}$  を入れて、計量を

$$g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

で定める。 $x$  方向に速度  $v$  動いている粒子の世界線は

$$t(\tau) = \tau$$

$$x(\tau) = v\tau, \quad |v| < 1$$

で与えられる。

# Minkowski 時空の復習

光速を  $c = 1$  とする。

Minkowski 時空は  $\mathbb{R}^4$  に座標  $\{t, x, y, z\}$  を入れて、計量を

$$g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

で定める。 $x$  方向に速度  $v$  動いている粒子の世界線は

$$t(\tau) = \tau$$

$$x(\tau) = v\tau, \quad |v| < 1$$

で与えられる。またこの世界線は 4 元加速度が 0 なので測地線である。

# Timelike と Spacelike

世界線  $c(\tau) = (t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$  の四元速度  $X = \dot{c}$  が

$$g(X, X) = -\dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 < 0$$

だとその瞬間は光速より遅く動いている状態で、 $X$  は timelike という。

# Timelike と Spacelike

世界線  $c(\tau) = (t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$  の四元速度  $X = \dot{c}$  が

$$g(X, X) = -\dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 < 0$$

だとその瞬間は光速より遅く動いている状態で、 $X$  は timelike という。

$$g(X, X) = -\dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0$$

だとその瞬間は光速で動いている状態で、 $X$  は lightlike or null という。

# Timelike と Spacelike

世界線  $c(\tau) = (t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$  の四元速度  $X = \dot{c}$  が

$$g(X, X) = -\dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 < 0$$

だとその瞬間は光速より遅く動いている状態で、 $X$  は timelike という。

$$g(X, X) = -\dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0$$

だとその瞬間は光速で動いている状態で、 $X$  は lightlike or null という。

$$g(X, X) = -\dot{t}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 > 0$$

だとその瞬間は光速より速く動いている状態で、 $X$  は spacelike という。

世界線  $t(\tau) = \tau, x(\tau) = v\tau$  の 4 元速度は  $X = (1, v, 0, 0)$  であり、

$$g(X, X) = -1 + v^2$$

なので、 $|v| < 1$  なら timelike で、 $|v| > 1$  なら spacelike である。

世界線  $t(\tau) = \tau, x(\tau) = v\tau$  の 4 元速度は  $X = (1, v, 0, 0)$  であり、

$$g(X, X) = -1 + v^2$$

なので、 $|v| < 1$  なら timelike で、 $|v| > 1$  なら spacelike である。 $|v| > 1$  の世界線に沿って移動しても timelike なままではいることはできないだろうか。。。

世界線  $t(\tau) = \tau, x(\tau) = v\tau$  の 4 元速度は  $X = (1, v, 0, 0)$  であり、

$$g(X, X) = -1 + v^2$$

なので、 $|v| < 1$  なら timelike で、 $|v| > 1$  なら spacelike である。 $|v| > 1$  の世界線に沿って移動しても timelike なままではいることはできないだろうか。。。もちろん Minkowski 時空の計量では無理。。。。

# アルクビエレのアイデア



# アルクビエレのアイデア



アルクビエレは

$$t(\tau) = \tau, x(\tau) = v\tau$$

という世界線の周りだけ計量を局所的に歪めて、この世界線が timelike godesic になるようにしたら良さそうだ、と考えた。

# アルクビエレのアイデア



アルクビエレは

$$t(\tau) = \tau, x(\tau) = v\tau$$

という世界線の周りだけ計量を局所的に歪めて、この世界線が timelike geodesic になるようにしたら良さそうだ、と考えた。こうすればアルクビエレ・ドライブの中心にいる人は timelike geodesic に従って動いているだけなのに、遠方の観測者にとってみると任意の速度で動いていることになる。

# アルクビエレのアイデア



アルクビエレは

$$t(\tau) = \tau, x(\tau) = v\tau$$

という世界線の周りだけ計量を局所的に歪めて、この世界線が timelike geodesic になるようにしたら良さそうだ、と考えた。こうすればアルクビエレ・ドライブの中心にいる人は timelike geodesic に従って動いているだけなのに、遠方の観測者にとってみると任意の速度で動いていることになる。しかも遠方では Minkowski 計量なので見せかけではなくて実際に長大な距離を動いていることになる。

# 計量の作り方

Minkowski の座標で動きたい世界線

$$c(\tau) = (t, x, y, z) = (\tau, x_s(\tau), 0, 0)$$

を決める。

# 計量の作り方

Minkowski の座標で動きたい世界線

$$c(\tau) = (t, x, y, z) = (\tau, x_s(\tau), 0, 0)$$

を決める。 $v_s = \dot{x}_s$  とすると、この世界線の 4 元速度は

$$u = \partial_t + v_s \partial_x$$

なので、新しい計量を

# 計量の作り方

Minkowski の座標で動きたい世界線

$$c(\tau) = (t, x, y, z) = (\tau, x_s(\tau), 0, 0)$$

を決める。 $v_s = \dot{x}_s$  とすると、この世界線の 4 元速度は

$$u = \partial_t + v_s \partial_x$$

なので、新しい計量を

$$g' = -dt^2 + (dx - v_s(t)dt)^2 + dy^2 + dz^2$$

と定義すれば

$$g'(u, u) = -1$$

になって  $u$  は timelike になる。

# 台関数

しかしこれだと世界線  $c(\tau)$  の付近以外も Minkowski からずれてしまうので、計量の歪みが局在化するとうに台関数を掛けておく。

# 台関数

しかしこれだと世界線  $c(\tau)$  の付近以外も Minkowski からずれてしまうので、計量の歪みが局在化するように台関数を掛けておく。世界線  $c(\tau)$  からの Euclid 距離を

$$r_s(t, x, y, z) = \sqrt{(x - x_s(t))^2 + y^2 + z^2}$$

とすると、

# 台関数

しかしこれだと世界線  $c(\tau)$  の付近以外も Minkowski からずれてしまうので、計量の歪みが局在化するように台関数を掛けておく。世界線  $c(\tau)$  からの Euclid 距離を

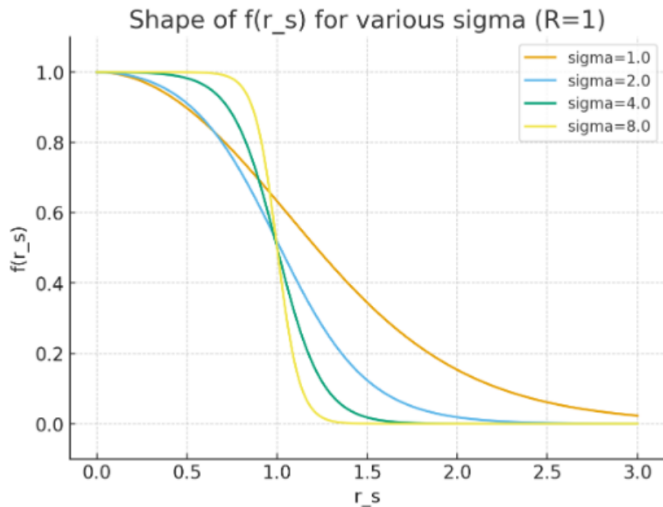
$$r_s(t, x, y, z) = \sqrt{(x - x_s(t))^2 + y^2 + z^2}$$

とするとき、台関数として

$$f(r_s) = \frac{\tanh(\sigma(r_s + R)) - \tanh(\sigma(r_s - R))}{2 \tanh(\sigma R)}.$$

を使う。 $\sigma$  は距離の逆数の次元を持つ定数。

# 台関数



# アルクビエレ・ドライブ metric

## 定義 0.1 (アルクビエレ・ドライブ metric)

$$g = -dt^2 + (dx - v_s(t)f_s(r_s(t, x, y, z))dt)^2 + dy^2 + dz^2$$

これはアルクビエレ・ドライブ metric と呼ばれる。また  $f_s \sim 1$  の領域をバブルという。

# 測地線

世界線  $c(\tau)$  が timelike geodesic になっていることは  $c(\tau)$  中心の座標を取れば簡単に分かる。

# 測地線

世界線  $c(\tau)$  が timelike geodesic になっていることは  $c(\tau)$  中心の座標を取れば簡単に分かる。世界線  $c(\tau)$  の近傍では、 $r_s \sim 0$ ,  $f_s \sim 1$  となっているので、計量は

$$g \sim -dt^2 + (dx - v_s(t)dt)^2$$

となっていると思ってよいので、

# 測地線

世界線  $c(\tau)$  が timelike geodesic になっていることは  $c(\tau)$  中心の座標を取れば簡単に分かる。世界線  $c(\tau)$  の近傍では、 $r_s \sim 0$ ,  $f_s \sim 1$  となっているので、計量は

$$g \sim -dt^2 + (dx - v_s(t)dt)^2$$

となっていると思ってよいので、

$$T = t, X = x - x_s(t)$$

という座標変換をすると、

$$g \sim -dT^2 + dX^2$$

になることが分かる。

# 測地線

世界線  $c(\tau)$  が timelike geodesic になっていることは  $c(\tau)$  中心の座標を取れば簡単に分かる。世界線  $c(\tau)$  の近傍では、 $r_s \sim 0$ ,  $f_s \sim 1$  となっているので、計量は

$$g \sim -dt^2 + (dx - v_s(t)dt)^2$$

となっていると思ってよいので、

$$T = t, X = x - x_s(t)$$

という座標変換をすると、

$$g \sim -dT^2 + dX^2$$

になることが分かる。そしてこの座標系では  $c(\tau)$  の軌道は

$$T = \tau, X = 0$$

なので、timelike geodesic である。

# 固有時と双子効果

通常 Minkowski 時空では、速く (光速よりは遅い) 動くとき固有時が静止系と比べて遅れて、合流したときには浦島太郎状態になってしまう浦島効果 or 双子効果というものが発生してしまう。

# 固有時と双子効果

通常 Minkowski 時空では、速く (光速よりは遅い) 動くとき固有時が静止系と比べて遅れて、合流したときには浦島太郎状態になってしまう浦島効果 or 双子効果というものが発生してしまう。しかしアルクビエレドライブを使うと、固有時のズレは無視できる程度に十分小さくすることができる。

timelike な世界線  $c(s)$  ( $s$  は任意のパラメータ) に沿って動く観測者の固有時は、その timelike 曲線の長さとして定義される：

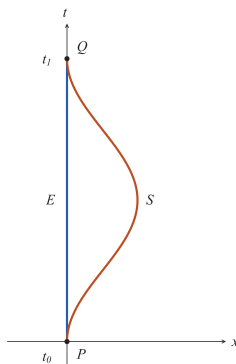
$$\Delta\tau = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{-g(\dot{c}, \dot{c})} ds \quad (1)$$

# 固有時と双子効果

Minkowski 時空で、静止する人  $E$  と、滑らかな未来向き timelike 曲線を動く人  $S$  を考える。 $s_0 < s_1$  とし、出発・再会の条件を

$$c_E(t) = (t, \mathbf{0}), \quad c_S(s) = (t(s), \mathbf{x}(s)), \quad t' > 0$$
$$t(s_i) = t_i, \quad \mathbf{x}(s_i) = \mathbf{0} \quad (i = 0, 1),$$

とする。



# 固有時と双子効果

$$\Delta\tau_E = \int_{t_0}^{t_1} 1 \, dt = t_1 - t_0 = \int_{s_0}^{s_1} t' \, ds,$$

# 固有時と双子効果

$$\Delta\tau_E = \int_{t_0}^{t_1} 1 \, dt = t_1 - t_0 = \int_{s_0}^{s_1} t' \, ds,$$

$$\Delta\tau_S = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{-g(c'_S, c'_S)} \, ds = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{(t')^2 - |\mathbf{x}'|^2} \, ds,$$

# 固有時と双子効果

$$\Delta\tau_E = \int_{t_0}^{t_1} 1 \, dt = t_1 - t_0 = \int_{s_0}^{s_1} t' \, ds,$$

$$\Delta\tau_S = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{-g(c'_S, c'_S)} \, ds = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{(t')^2 - |\mathbf{x}'|^2} \, ds,$$

$$\Delta\tau_E - \Delta\tau_S = \int_{s_0}^{s_1} \left( t' - \sqrt{(t')^2 - |\mathbf{x}'|^2} \right) ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{|\mathbf{x}'|^2}{t' + \sqrt{(t')^2 - |\mathbf{x}'|^2}} ds \geq 0.$$

アルクビエレドライブに乗ってる観測者を A とする。

アルクビエレドライブに乗ってる観測者を A とする。A は  $x = 0$  からゆっくり  $x = R$  まで移動して、そこからアルクビエレドライブに乗って任意の世界線で旅して  $x = R$  に戻ってきて、 $x = 0$  にゆっくり移動して、観測者 E に合流するとする。

アルクビエレドライブに乗ってる観測者を  $A$  とする。 $A$  は  $x = 0$  からゆっくり  $x = R$  まで移動して、そこからアルクビエレドライブに乗って任意の世界線で旅して  $x = R$  に戻ってきて、 $x = 0$  にゆっくり移動して、観測者  $E$  に合流するとする。 $x = 0$  と  $x = R$  の間の移動はゆっくりで固有時のズレは十分小さいとする。このとき、固有時のズレは以下のように計算される。

アルクビエレドライブに乗ってる観測者を  $A$  とする。 $A$  は  $x = 0$  からゆっくり  $x = R$  まで移動して、そこからアルクビエレドライブに乗って任意の世界線で旅して  $x = R$  に戻ってきて、 $x = 0$  にゆっくり移動して、観測者  $E$  に合流するとする。 $x = 0$  と  $x = R$  の間の移動はゆっくりで固有時のズレは十分小さいとする。このとき、固有時のズレは以下のように計算される。 $A$  の世界線を

$c_A(t) = (t, x_s(t), 0, 0)$  とし、 $x_s$  が  $x = 0$  から一定距離以上離れていて、バブルを十分局在化させるとする。

アルクビエレドライブに乗ってる観測者を  $A$  とする。 $A$  は  $x = 0$  からゆっくり  $x = R$  まで移動して、そこからアルクビエレドライブに乗って任意の世界線で旅して  $x = R$  に戻ってきて、 $x = 0$  にゆっくり移動して、観測者  $E$  に合流するとする。 $x = 0$  と  $x = R$  の間の移動はゆっくりで固有時のズレは十分小さいとする。このとき、固有時のズレは以下のように計算される。 $A$  の世界線を

$c_A(t) = (t, x_s(t), 0, 0)$  とし、 $x_s$  が  $x = 0$  から一定距離以上離れていて、バブルを十分局在化させるとする。このとき、

$$g(\dot{c}_A, \dot{c}_A) = -1 + (v_s - v_s f(0))^2 = -1,$$

$$g(\dot{c}_E, \dot{c}_E) = -1 + v_s^2 f(|x_s(t)|)^2 \sim -1$$

となる。最後の近似は、 $f(|x_s|) \sim 0$  となっていることを使った。

アルクビエレドライブに乗ってる観測者を A とする。A は  $x = 0$  からゆっくり  $x = R$  まで移動して、そこからアルクビエレドライブに乗って任意の世界線で旅して  $x = R$  に戻ってきて、 $x = 0$  にゆっくり移動して、観測者 E に合流するとする。 $x = 0$  と  $x = R$  の間の移動はゆっくりで固有時のズレは十分小さいとする。このとき、固有時のズレは以下のように計算される。A の世界線を

$c_A(t) = (t, x_s(t), 0, 0)$  とし、 $x_s$  が  $x = 0$  から一定距離以上離れていて、バブルを十分局在化させるとする。このとき、

$$g(\dot{c}_A, \dot{c}_A) = -1 + (v_s - v_s f(0))^2 = -1,$$

$$g(\dot{c}_E, \dot{c}_E) = -1 + v_s^2 f(|x_s(t)|)^2 \sim -1$$

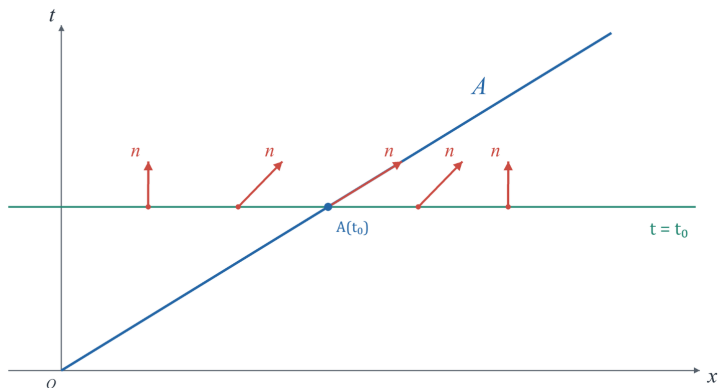
となる。最後の近似は、 $f(|x_s|) \sim 0$  となっていることを使った。このことから、アルクビエレドライブに乗って動いても、その場で止まっても時間の進み方はほとんど同じであることが分かる。

# バブル内の微小体積の様子

$t$  = 一定面に  $g$  の意味で直交するベクトルは

$$n = \partial_t + v_s f(r_s) \partial_x$$

となる。これは観測者 A と A の近くの観測者たちを表している。



# バブル内の微小体積の様子

$n$  の流れによる微小体積の膨張率を計算すると、

$$\begin{aligned}\theta &= \nabla_\mu n^\mu = \frac{1}{\sqrt{-\det g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-\det g} n^\mu \right) \\ &= \partial_x (v_s f(r_s)) \quad (\because \det g = -1) \\ &= v_s f'(r_s) \frac{x - x_s(t)}{r_s}.\end{aligned}$$

となる。

# バブル内の微小体積の様子

$n$  の流れによる微小体積の膨張率を計算すると、

$$\begin{aligned}\theta &= \nabla_\mu n^\mu = \frac{1}{\sqrt{-\det g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-\det g} n^\mu \right) \\ &= \partial_x (v_s f(r_s)) \quad (\because \det g = -1) \\ &= v_s f'(r_s) \frac{x - x_s(t)}{r_s}.\end{aligned}$$

となる。 $x$  が正の向きに進む場合、

$$v_s > 0, \quad f'(r_s) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \theta < 0 & (x > x_s(t)), \\ \theta > 0 & (x < x_s(t)). \end{cases}$$

# バブル内の微小体積の様子

$n$  の流れによる微小体積の膨張率を計算すると、

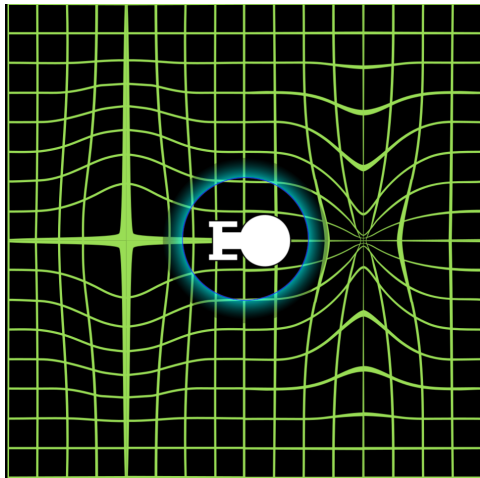
$$\begin{aligned}\theta &= \nabla_\mu n^\mu = \frac{1}{\sqrt{-\det g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-\det g} n^\mu \right) \\ &= \partial_x (v_s f(r_s)) \quad (\because \det g = -1) \\ &= v_s f'(r_s) \frac{x - x_s(t)}{r_s}.\end{aligned}$$

となる。 $x$  が正の向きに進む場合、

$$v_s > 0, \quad f'(r_s) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \theta < 0 & (x > x_s(t)), \\ \theta > 0 & (x < x_s(t)). \end{cases}$$

つまり、前方では隣り合う観測者が集まり、後方では離れていく。

# バブル内の微小体積の様子



# 実現可能性

色々な観点から実現できるか調べられているが、今のところ無理そう。

# 実現可能性

色々な観点から実現できるか調べられているが、今のところ無理そう。  
少なくとも 1000 年、2000 年とかでどうにかなるレベルとは思えない。

# 終わり

ご清聴ありがとうございました。