

部分構造論理入門

君がいるだけで

すうがく徒のつどい 2026 年 10 月 12 日

自己紹介

自己紹介

- 名前 (ハンドルネーム): 君がいるだけで
- X(旧 Twitter): @Nr2YcdmDGE53729
- 所属: 慶應義塾大学文学研究科哲学・倫理学専攻修士 1 年
- 専門, 興味: 数理論理学. 特に算術, 不完全性定理, 証明論. ちなみに今回講演する部分構造論理は私の専門ではない.
- 知っている人向けの疑問: 数学の哲学はもう主な専門ではない. 興味は完全に数学に移った.

自己紹介 2(君がいるだけでとは)

君がいるだけでとは

- 1992 年に発売された米米 CLUB 最大のヒット曲 (1992 年のオリコン 1 位)
- 「素顔のままで」(当時の月 9 ドラマ 安田成美, 中森明菜の W 主演) の主題歌
- 「君がいるだけで」というハンドルネームの由来はこの曲である.
- 公式の MV: <https://youtu.be/5Q8vU0GWGzM?si=U6tIJfsYjUELq01M>
- THE FIRST TAKE: <https://youtu.be/R0sE9g4adbA?si=X9kTjLh72npqn9Ct> (冒頭のカールスモーキー右井による浅い発言は曲に深みを出すためのテクニックである. 右井と書いた理由は動画を見れば推測できる.)

ぜひ「君がいるだけで」を聞いてください.(そして再生数を増やしてもらって...)

目的とあらまし

あらまし

- 数理論理学とは何かについて簡単に説明する.
- 古典命題論理のシークエント計算 LK と直観主義命題論理のシークエント計算 LJ を導入する.
- 完全ランベック計算 FL を導入する.
- 部分構造論理について紹介する.

目的

- 聴衆に数理論理学とは何か, 部分構造論理とは何かについて知ってもらう.
- 数理論理学や部分構造論理について興味を持ってもらう.
- 哲学科でやる論理学 (の一部) を知ってもらう.(ちなみに部分構造論理を授業でやる哲学科は日本では少ないと思います...)
- 慶應でやった授業の復習.(個人的な動機)

- ネタが多いかもしれないが、滑ると思うのであらかじめ謝罪しておく。申し訳ない...
- 誤植の多い生涯を送ってきたため、誤植が多いかもしれない...
- 前提知識をできる限り仮定しないなどと抜かしていたが、シークエント計算になれていないと理解するのは厳しいかもしれない。(できる限りと言ったのでご容赦を...)
- 前提知識を仮定しないといった手前、この講演は部分構造論理に関する紹介をするにとどまってしまっている。証明も書いていない。申し訳ない...

本当の目的

米米 CLUB や君がいるだけでを皆に知ってもらい, 興味を持ってもらうのが主目的です.

数理論理学とは

数理論理学とは

- 形式化 (記号化) した数学・論理を数学的対象として扱う数学の一分野.
- 証明などを記号化し, 数学を使って調べる.

次に数理論理学で用いる言語について紹介する. これを用いて数学を形式化する.

数理論理学で用いる言語

以下の記号が数理論理学で用いる言語である.

- $\wedge$ (かつ), $\vee$ (または), $\rightarrow$ (ならば), $\neg$ (でない) といった記号 (論理結合子).
- 命題を (変数として) 記号化したもの $p, q, r, p_1, p_2, \dots$ (命題変数).
- $(,)$ といった補助記号 (カッコ).

論理式

次に、論理式について定義する。数学を形式化する際に重要になる。

論理式

- 命題変数は論理式である。(規則 1)
- A が論理式なら $(\neg A)$ も論理式である。(規則 2)
- A, B が論理式なら $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ も論理式である。(規則 3)
- 規則 1, 規則 2, 規則 3 で論理式とされたもののみが論理式である。(規則 4)

論理式に関する注意

- 論理式の例. $((p \wedge r) \rightarrow (q \vee r))$
- 論理式でない記号列の例. $p\vee)$, $(p \wedge \neg \text{石井竜也})$
- 括弧は適宜省略する。結合の強さは $\neg > \wedge, \vee > \rightarrow$ であり, $\rightarrow$ は右結合, すなわち $A \rightarrow B \rightarrow C = A \rightarrow (B \rightarrow C)$ である。

数理論理学に関するちょっとした注意

- 先ほども述べたように、数理論理学では証明などを記号化し、それらを数学的対象として扱っている.
- そのため、論理式の有限列としての証明と実際に自然言語で書かれた証明との区別が必要である.
- p や $p_2 \vee p_1$ などとはただの記号列である. そして、真理値等を定義することで、 p や $p_2 \vee p_1$ などの真偽を考えることができる.
- A, B, C などの記号は論理式を表すメタ記号である. A は任意の論理式を表すメタ記号なので、 A は p や $p_2 \vee p_1$ などのような任意の論理式を表す.

古典論理および直観主義論理

- 数理論理学において, さまざまな論理体系が扱われているが, ここでは古典論理と直観主義論理を扱う.
- 古典論理と直観主義論理との違いを (大雑把になってしまうが) 簡単に説明する.
- 古典論理とは, 排中律 (任意の論理式 A について $A \vee \neg A$ が証明可能であるという原理) を認めるような論理である.
- 直観主義論理とは, 排中律を認めず, 命題が真であることをその命題の証明が構成できることとしている論理である.

シーケントとは

- 部分構造論理の説明にシーケント計算が必要となるため, シーケントについて説明する.
- Γ, Δ を論理式の (順序のある) 有限列とする. このとき, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ をシーケントといい, Γ をシーケントの左辺, Δ をシーケントの右辺という.
- シーケントをインフォーマルに説明すると, 「仮定 Γ から結論 Δ が帰結する」ことを表している.
- シーケントの中に現れる $\Rightarrow$ は分離子といい, 論理結合子とは区別される.

シーケント計算 LK (始式, カット規則, 構造規則)

- まずは古典論理のシーケント計算 LK を導入する. 以下, $A, B, \dots$ を任意の論理式, $\Gamma, \Delta, \dots$ は論理式の有限列とする.
- LK は以下の推論規則からなる.

$$\frac{}{A \Rightarrow A} A_x$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Lambda \Rightarrow \Theta}{\Gamma, \Lambda \Rightarrow \Delta, \Theta} Cut$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, B, A, \Delta \Rightarrow \Lambda} EL$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Lambda}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A, \Lambda} ER$$

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} CL$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} CR$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} WL$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} WR$$

シーケント計算 LK (論理規則)

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Lambda \Rightarrow \Theta}{A \rightarrow B, \Gamma, \Lambda \Rightarrow \Delta, \Theta} \rightarrow L$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B} \rightarrow R$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge L$$

$$\frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge L$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} \wedge R$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \vee L$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} \vee R$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} \vee R$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \neg L$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A} \neg R$$

古典論理のシーケント計算 LK(推論規則の解説) と直観主義論理のシーケント計算 LJ

- 推論規則の図 (証明図) は横線の上にあるシーケントから横線の下にシーケントが導けることを表している.
- シーケントの左辺の, (カンマ) は「かつ」(連言) を, シーケントの右辺の, (カンマ) は「または」(選言) を, $\Rightarrow$ は「ならば」(条件法) を表していると考えてもよい.
- EL, ER は交換規則といい, 「過程や結論の順序を入れ替えてもよい」ことを表している.
- CL, CR は縮約規則といい, 「同じ仮定や結論を一つにまとめてもよい」ことを表している.
- WL, WR は弱化規則といい, 「無駄な仮定や結論を加えて主張を弱めてもよい」ことを表している.
- 直観主義論理のシーケント計算 LJ は, シーケントの右辺に現れる論理式が 0 個か 1 個だけになるように制限した体系である.

LK と LJ の証明図の例

LK と LJ において, どのようなシークエントが導出できるのかについて見ていく.

$$\frac{\frac{\frac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A, B} \text{WR}}{\Rightarrow A, A \rightarrow B} \rightarrow R}{\frac{(A \rightarrow B) \rightarrow A \Rightarrow A, A}{(A \rightarrow B) \rightarrow A \Rightarrow A} \text{CR}} \rightarrow L$$
$$\frac{(A \rightarrow B) \rightarrow A \Rightarrow A}{\Rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A} \rightarrow R$$

$$\frac{\frac{\frac{A \Rightarrow A}{A \wedge B \Rightarrow A} \wedge L}{A \wedge B \Rightarrow A \vee B} \vee R}{\Rightarrow A \wedge B \rightarrow A \vee B} \rightarrow R$$

- このように始式からはじめて推論規則を使うことでシークエント $\Gamma \Leftrightarrow \Delta$ が導出できる場合, $\Gamma \Leftrightarrow \Delta$ は証明可能であるという.(上のような図を証明図という.)
- 左側の論理式 $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ をパースの法則という. シークエントの右辺に論理式が2個出てくる箇所があることから分かるようにパースの法則は LJ では証明できない. 一方, 右側の論理式 $A \wedge B \rightarrow A \vee B$ はシークエントの右辺に論理式が1個しか出てこないため LJ でも証明できる (右上の図は LJ における証明図でもある).

- LJ は LK からシークエントの右辺の論理式の高々 1 個に制限したような証明体系であった.
- 制限することで, どういったものが証明できなくなるのか, 制限したものはどのような役割を果たしていたのかなどの証明に関する性質が分析できる.
- では, 他にも LJ や LK に何かしらの制限をしたものはあるのだろうか.
- これらの疑問に答えるアプローチとして部分構造論理が考えられる.

部分構造論理とは

- 部分構造論理は古典論理のシーケント計算 LK から構造規則と呼ばれる規則を制限した論理のことである¹.
- 部分構造論理は構造規則を制限したような論理の (数学的) 性質を統一的に調べることをモチベーションとしている.
- 構造規則がどのような役割を果たすのかについて調べることも部分構造論理のモチベーションであるといえる.
- 次のスライドでは基本的な部分構造論理となる完全ランベック計算について紹介する.

¹厳密な定義 (定義というよりは定義の提唱といった方が正確かもしれない) は時間の都合上本講演では紹介できない. 詳しくは最後の方で紹介する文献を見てほしい.

完全ランベック計算

- LJ から構造規則を除いた論理を完全ランベック計算 FL という.
- FL では構造規則が認められていないため, 論理結合子 $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee$ の代わりに命題定数 $0, 1, \perp, \top$ と論理結合子 $\backslash, /, \wedge, \vee, \cdot$ を考える.
- 古典論理において $\neg A$ は $A \rightarrow \perp$ の略記とする流儀がある. ($\perp$ は矛盾を表す命題を定数として記号化したもの.)
- 括弧は適宜省略する. 論理結合子の結合の強さは $\cdot > \backslash, / > \wedge, \vee$ である.
- FL では $\neg A$ の代わりに $\sim A$ と $-A$ を考える. $\sim A$ は $A \backslash 0$, $-A$ は $0 / A$ の略記とする.
- 完全ランベック計算では構造規則が認められていないため, 最も基本的な部分構造論理となる.

完全ランベック計算の論理結合子の説明

- $\backslash$ を左除算, $/$ を右除算, $\cdot$ を乗法積, $\wedge$ を加法的連言, $\vee$ を加法的選言という.
- $\backslash, /$ は古典論理でいうところの $\rightarrow$ に対応しているが, 交換規則が使えないため, $\backslash, /$ に分かれている.
- 完全ランベック計算において $\wedge$ と $\vee$ は古典論理の $\wedge$ と $\vee$ に対応している.
- 完全ランベック計算では構造規則が使えないことにより, 左辺の (カンマ) を「かつ」として読むことが出来ない. そのため, 代わりに $\cdot$ が (カンマ) のような役割を果たしていると考え.
- 完全ランベック計算において $x \backslash y$ は左に x を取って y を作ることを表している.
- 完全ランベック計算において y / x は右に x を取って y を作ることを表している.
- 1 は乗法積に関する単位元, 0 は加法的選言に対する単位元, $\top$ は加法的連言の単位元である. $\perp$ はシークエントの左辺に現れるとどんな結論も導けることを表している. ($\perp$ の詳しい説明や乗法和というものを導入しない理由の説明は割愛する.)

完全ランベック計算の結合子の説明 (続き)

- 組合せ範疇文法 (CCG) の文献では $y \backslash x$ と書いて、左に x を取って y を作ることを表すような記法を用いていることが多い。本当に紛らわしい。
- CCG の記法ではランベック計算における代数的な動機付け (剰余演算との関係をランベックは意識していたらしい) が見えづらくなっている。
- そもそも部分構造論理の記法と CCG の記法が統一されていないのは本当に紛らわしいので、統一してほしい。
- Steedman が CCG を提案し、CCG の記法も Steedman が独自に提案したことが起因であるらしい。Steedman 許すまじ...
- 本スライドで採用するバックスラッシュの記法が「正しい」記法であり、CCG の記法は独特で河村隆一みたいなので、河村隆一記法と呼ぶ。

完全ランベック計算の推論規則

まずは FL のシーケント計算における推論規則を説明する. 以下, $\alpha, \beta \dots$ や $\varphi, \psi, \dots$ を論理式, $\Gamma, \Delta, \dots$ を論理式の有限列とする.

$$\frac{}{\alpha \Rightarrow \alpha} Ax$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Delta, \alpha, \Lambda \Rightarrow \varphi}{\Delta, \Gamma, \Lambda \Rightarrow \varphi} Cut$$

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow \top} \Rightarrow \top$$

$$\frac{}{\Gamma, \perp, \Delta \Rightarrow \varphi} \perp \Rightarrow$$

$$\frac{}{\Rightarrow 1} \Rightarrow 1$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, 1, \Delta \Rightarrow \varphi} 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow 0} \Rightarrow 0$$

$$\frac{}{0 \Rightarrow} 0 \Rightarrow$$

完全ランベック計算の推論規則 (続き)

$$\frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \backslash \beta} \Rightarrow \backslash$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Delta, \beta, \Lambda \Rightarrow \varphi}{\Delta, \Gamma, \alpha \backslash \beta, \Lambda \Rightarrow \varphi} \backslash \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \beta / \alpha} \Rightarrow /$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Delta, \beta, \Lambda \Rightarrow \varphi}{\Delta, \beta / \alpha, \Gamma, \Lambda \Rightarrow \varphi} \backslash \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \alpha \cdot \beta, \Delta \Rightarrow \varphi} \cdot \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Delta \Rightarrow \beta}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \alpha \cdot \beta} \Rightarrow \cdot$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Delta \Rightarrow \varphi} \wedge_l \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma, \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Delta \Rightarrow \varphi} \wedge_r \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta} \Rightarrow \wedge$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \Delta \Rightarrow \varphi \quad \Gamma, \beta, \Delta \Rightarrow \varphi}{\Gamma, \alpha \vee \beta, \Delta \Rightarrow \varphi} \vee \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta} \Rightarrow \vee_l$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta} \Rightarrow \vee_r$$

完全ランベック計算のシーケント計算における注意

- 先ほどにも述べたように完全ランベック計算におけるシーケント計算では、構造規則が制限されているため、シーケントの左辺に出てくる論理式の順番は大事になる。
- つまり、完全ランベック計算のシーケント計算では、シーケントの左辺に出てくる論理式の順番を入れ替える規則 (交換規則) がないので、勝手に順番を変えることはできない。
- 完全ランベック計算のシーケントの右辺に出てくる論理式の高々は 1 個である。
- 加法的連言と加法的選言における推論規則の形に注意。例えば、 $\Rightarrow \wedge$ の上側に出てくる $\Gamma \Rightarrow \alpha$ と $\Gamma \Rightarrow \beta$ に出てくる Γ は同じでなければいけない。 $\vee \Rightarrow$ も同様。
- 完全ランベック計算のシーケント計算では、構造規則が制限されているため、シーケントの左辺に出てくる、(カンマ) を「かつ」に置き換えることはできない。

FL の証明図の例

FL において, どのようなシークエントが導出できるのかについて見ていく.

$$\frac{\alpha \Rightarrow \alpha \quad \beta \Rightarrow \beta}{\beta/\alpha, \alpha \Rightarrow \beta} / \Rightarrow \qquad \frac{\alpha \Rightarrow \gamma/\beta \quad \frac{\beta \Rightarrow \beta \quad \gamma \Rightarrow \gamma}{\gamma/\beta, \beta \Rightarrow \gamma} / \Rightarrow}{\frac{\alpha, \beta \Rightarrow \gamma}{\alpha \cdot \beta \Rightarrow \gamma} \cdot \Rightarrow} \text{Cut}$$

$$\frac{\frac{\alpha \Rightarrow \alpha \quad \beta \Rightarrow \beta}{\alpha, \beta \Rightarrow \alpha \cdot \beta} \Rightarrow \cdot \quad \alpha \cdot \beta \Rightarrow \gamma}{\frac{\alpha, \beta \Rightarrow \gamma}{\beta \Rightarrow \alpha \setminus \gamma} \Rightarrow \setminus} \text{Cut}$$

- 左上の証明図は, $/$ の右に x を取って y を作るという説明に対応する証明図である.
- 右上の証明図と下の証明図の解説は次のスライドで説明する.

FL の証明図の例 (続き)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\alpha \Rightarrow \gamma / \beta \quad \frac{\beta \Rightarrow \beta \quad \gamma \Rightarrow \gamma}{\gamma / \beta, \beta \Rightarrow \gamma} / \Rightarrow}{\frac{\alpha, \beta \Rightarrow \gamma}{\alpha \cdot \beta \Rightarrow \gamma} \cdot \Rightarrow} \text{Cut}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{\alpha \Rightarrow \alpha \quad \beta \Rightarrow \beta}{\alpha, \beta \Rightarrow \alpha \cdot \beta} \Rightarrow \cdot \quad \frac{\alpha \cdot \beta \Rightarrow \gamma}{\frac{\alpha, \beta \Rightarrow \gamma}{\beta \Rightarrow \alpha \backslash \gamma} \Rightarrow \backslash} \text{Cut}
 \end{array}$$

- 左の証明図は、 $\alpha \Rightarrow \gamma / \beta$ を仮定すると、 $\alpha \cdot \beta \Rightarrow \gamma$ が証明できることを表している。(逆のことを表す証明図も右の証明図を少し変えれば書ける.)
- 右の証明図は、 $\alpha \cdot \beta \Rightarrow \gamma$ を仮定すると、 $\beta \Rightarrow \alpha \backslash \gamma$ が証明できることを表している。(逆のことを表す証明図も左の証明図を少し変えれば書ける.)

部分構造論理の例

部分構造論理の例を見ていく.

- 線型論理: 弱化規則と縮約規則が使えない. 慶應の人御用達の論理.
- 関連性論理: 弱化規則が使えない.
- 完全ランベック計算: 弱化規則と縮約規則と交換規則が使えない.
- ランベック計算: 完全ランベック計算における論理結合子を $\backslash$ と $/$ だけに制限したもの.
- BCK 論理: 縮約規則が使えない. 縮約規則が使えないため, ラッセルのパラドックスが成り立たないことが知られている.

部分構造論理の例 (続き)

- 中間論理: 古典論理より弱く直観主義論理よりも強い論理の総称.
- 最小論理: 爆発律を放棄する論理. 矛盾許容論理の一種. 何が最小なのか分かん.
- 直観主義論理: 命題が真であることをその命題の証明が構成できることとしている論理.
- 古典論理: 無矛盾な部分構造論理の中で極大 (だが最強ではない) ものの一つ.
- ファジー論理: 真理値が 0 から 1 までの値を取る. 単位区間のなす剰余代数に関する完全性, いわゆる標準完全性が成り立つ論理のことをファジー論理と呼ぶことが多いらしい.

カット除去定理

LK や LJ, FL, およびランベック計算に関しては次のようなことが成り立つ.

カット除去定理

LK(LJ, FL, ランベック計算) において証明可能なシーケントは, LK(LJ, FL, ランベック計算) においてもカットなしでも証明可能.

LK や LJ におけるカット除去定理の証明は, 前回のすうがく徒のつどいの講演でくま氏が紹介している.

部分構造論理におけるカット除去定理

部分構造論理において、カット除去定理が成り立たない場合がある。実際、次のことが知られている。

次の推論規則を考える。

$$\frac{}{\Rightarrow \alpha \setminus 0} (i)$$

このとき、FL に (i) を加えた体系 (これを FL+(i) と表記する) ではカット除去定理が成り立たない。

ただし、FL+(i) と証明能力を同じにしたまま (i) を構造規則 (r_i) に変えたような体系 (FL に (r_i) を加えた体系) ではカット除去定理が成り立つことが知られている。(これはどんな構造規則を FL に加えてもカット除去性を阻害しないことを意味しない。)

部分構造論理における結果

- 部分構造論理という分野は 1990 年代に誕生している。そして、前原昭二や岡田光弘によってカット除去定理の代数的証明が与えられている。
- 部分構造論理において、FL の公理的拡大が上手くそれと証明能力が同じ FL の構造的拡大に変えてあげることができて、そのような構造的拡大を得るための具体的な手続きが構成できるかが知られている。Ciabattoni, Galatos, 照井一成によって導入された部分構造階層と呼ばれるものを用いる。
- FL に交換規則を加えた FL_e において部分構造階層は崩壊する。(N_3 と呼ばれるところで崩壊する.)

ただし、部分構造階層が FL で崩壊するのかは未解決である。

部分構造論理 (主にランベック計算) の応用例

- 部分構造論理はコンピュータサイエンスや言語学などにも応用されている.
- ランベック計算は範疇文法の定式化を与えている.
- ランベック計算はジャズのコード進行の統語論的解析にも用いられている.

まとめのようなもの

- 部分構造論理とは LK や LJ から構造規則を制限したような論理である.
- 部分構造論理の正確な定義は完全ランベック計算の公理的拡大である.
- 部分構造論理ではカット除去定理が成り立つ場合もあれば, カット除去定理が成り立たない場合がある.
- 部分構造論理は一応, 言語学でも応用されている. 特にランベック計算.

- 範疇文法の定式化を与えることが、ランベック計算を導入した目的らしいがよく分からない。なので、誰か範疇文法を勉強して、次のすうがく徒のつどいあたりでランベック計算と範疇文法というテーマで講演してほしい。それか私に範疇文法を教えてほしい。
- 言語学の人が集まったところでランベック計算について話すときは、CCG の記法ではなく、今回講演した記法でランベック計算を計算してほしい。

- 私は慶應の授業資料をもとにこの資料を作ったので残念ながら紹介できない... () なので、今回は他の人たちに紹介してもらった文献や授業資料の文献案内を元に紹介することになる。申し訳ない...
- Ono(2019), Proof Theory and Algebra in Logic や Restall(2000), An Introduction to Substructural Logics が有名らしい。ちなみに Ono(2019) では FL の拡大として得られる部分構造論理について詳しいらしい。他にも Paoli(2002), Substructural Logics: A Primer や (少しアドバンスドらしいが) Galatos, Jipsen, Kowalski, Ono(2007), Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics も有名らしい。
- 現在の時点で入手が容易な部分構造論理を学べる和書はない。古森, 小野 (2010), 現代数理論理学序説に部分構造論理がある程度詳しく載っているらしいが、入手が困難である。
- 古典論理や直観主義論理も部分構造論理の一種なので、日本語でも部分構造論理について学べるのではと言うのはやめてください!

-
- 部分構造論理を学ぶには, 古典論理などに慣れておいた方がよいと思うので, 数理論理学の初学者向けの本も一応紹介しておく.
- 鹿島 (2009), 数理論理学や戸次²(2012), 数理論理学は数理論理学の初学者向けの教科書として定評があり, 古典論理や直観主義論理のシークエント計算を取り扱っている.
- 峯島 (2025), 一歩ずつマスターする論理学入門は本当に初学者向けの教科書として読みやすい. 人文系の学生にも読みやすいと思う (高校生にもおすすめてできるかは分からないが, 恐らく読めると思う). ただし, シークエント計算ではなく自然演繹という他の証明体系を取り扱っている点には注意.

² 「べっき」と読むことに注意. 私は最初「とつぎ」と勘違いしていた.

最後のコメント

- この講演を聴いて数理論理学や部分構造論理に興味を持ったら、ぜひ勉強してほしい.
- ランベック計算をやる際は $\backslash$ に関して河村隆一記法ではなく、「正しい」記法を用いてほしい.
- 繰り返しになるが、ぜひ米米 CLUB の君がいるだけで聞いてほしい.(これがメインである.)