

L^p -空間上のフーリエ変換

人工対数 © @F5nUa

京都大学数学教室修士 1 回 第 10 回すうがく徒のつどい

やることリスト

プレゼンは以下の流れでやります

- ① 定義と復習
- ② 背景
- ③ 主定理の紹介
- ④ 証明の準備
- ⑤ 証明の概略

定義

念のため復習

定義 0.1 (L^p -空間)

$(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$ を測度空間、 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ を可測関数、 $p \in [1, \infty]$ とする
(以後、関数は注意しない限り $\mathbb{C}$ -値)。

f の L^p -ノルムを

$$\|f\|_{L^p(\Omega, \mu)} := \begin{cases} \left\{ \int_{\Omega} |f(\omega)|^p \mu(d\omega) \right\}^{\frac{1}{p}} & (p < \infty) \\ \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |f| & (p = \infty) \end{cases}$$

で定め、 Ω 上の L^p -空間を次で定める。

$$L^p(\Omega, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ は可測} \mid \|f\|_{L^p(\Omega, \mu)} < \infty\} / (\mu\text{-a.e. 一致})$$

定義

注意 0.2

- $\mathbb{R}$ のルベーグ測度を dx で表す
- L^2 -ノルムは内積

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mu)} := \int_{\Omega} f(\omega) \overline{g(\omega)} \mu(d\omega)$$

に由来

定義 0.3 ($L^1(dx)$ 上のフーリエ変換)

$f \in L^1(dx)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を次で定める。

$$\mathcal{F}f(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i x \xi} dx$$

定義

定義 0.4 ($L^2(dx)$ 上のフーリエ変換)

$\mathcal{F}$ は (急減少関数全体 $\mathcal{S}$ に一度制限してから) ユニタリ $L^2(dx) \rightarrow L^2(dx)$ に拡張でき、これも $\mathcal{F}$ で表す。

定義 0.5 (作用素ノルム)

$(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間、 $T: X \rightarrow Y$ を線型作用素とする。 T の作用素ノルムを

$$\|T\|_{X \rightarrow Y} := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

で定める。この値が有限のとき、 T は**有界**であるという。有界性は連続性と同値。

復習

- $\mathcal{F} : L^2(dx) \longrightarrow L^2(dx)$ はノルム 1 ($\cdot$ 等長性)
- $\mathcal{F} : L^1(dx) \longrightarrow L^\infty(dx)$ は (well-defined で) ノルム 1

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}f\|_{L^\infty(dx)} &= \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i x \xi} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \\ &= \|f\|_{L^1(dx)}\end{aligned}$$

より well-defined かつ $\|\mathcal{F}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \leq 1$
 逆の不等号は $g(x) = e^{-\pi x^2}$ が達成 ($\mathcal{F}g = g$ と

$$\|g\|_{L^q(dx)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{q^{\frac{1}{q}}}} & (q < \infty) \\ 1 & (q = \infty) \end{cases}$$

より)

やっところさ準備終わり!

背景

$\mathcal{F}$ を他の $L^p(dx)$ 上でも考えたい (有界で!!)

$L^1 \rightarrow L^\infty, L^2 \rightarrow L^2$ の有界性は知っている

$\Rightarrow$ **補間**して、有界線型作用素 $L^p \rightarrow L^{p'}$ ($1 < p < 2$) と思える!?

但し $p' \in (2, \infty)$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ なる数 (p のヘルダー共役)

というのも、次ページのような定理が知られている。

背景

$(\Omega_j, \mathcal{F}_j, \mu_j)$ ($j = 1, 2$) は σ -有限測度空間、 $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$
 $\theta \in [0, 1]$ に対し $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ で $p_\theta \in [p_0, p_1]$ を定義 (q_θ も)

線型作用素 T が $\begin{cases} T : L^{p_0}(\mu_1) \longrightarrow L^{q_0}(\mu_2) \\ T : L^{p_1}(\mu_1) \longrightarrow L^{q_1}(\mu_2) \end{cases}$ として有界に定まっている

$\implies$ 作用素 $T : L^{p_0}(\mu_1) + L^{p_1}(\mu_1) \longrightarrow L^{q_0}(\mu_2) + L^{q_1}(\mu_2)$ が定まる

定理 1.1 (リース・ソリンの補間定理)

制限 $T : L^{p_\theta}(\mu_1) \longrightarrow L^{q_\theta}(\mu_2)$ は (well-defined かつ) 有界で、

$$\|T\|_{L^{p_\theta} \rightarrow L^{q_\theta}} \leq \|T_0\|_{L^{p_0} \rightarrow L^{q_0}}^{1-\theta} \|T_1\|_{L^{p_1} \rightarrow L^{q_1}}^{\theta}$$

$$f \in L^{p_\theta}(\mu_1) \implies f \cdot 1_{\{|f|>1\}} \in L^{p_0}(\mu_1), f \cdot 1_{\{|f|\leq 1\}} \in L^{p_1}(\mu_1)$$

背景

$\mathcal{F}$ にリース・ソリンの補間定理を使うと、

系 1.2 (ハウスドルフ・ヤングの不等式)

$\forall p \in (1, 2), \mathcal{F} : L^p(dx) \longrightarrow L^{p'}(dx)$ が well-defined で、

$$\|\mathcal{F}\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} \leq 1$$

以下 $p \in (1, 2)$ とする。 $\|\mathcal{F}\|_{L^p \rightarrow L^{p'}}$ は丁度 1 か?

主定理の紹介

定理 2.1 (主定理 (バベンコ・ベックナーの定理))

$$\|\mathcal{F}\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} = \sqrt{\frac{p^{\frac{1}{p}}}{p'^{\frac{1}{p'}}}}$$

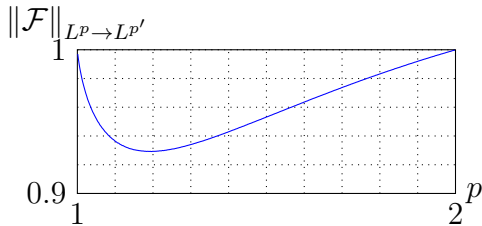


Figure: $\mathcal{F}$ のノルム、最小は $p = \frac{e(e - \sqrt{e^2 - 4})}{2} \simeq 1.192$ での約 0.9292

主定理の紹介

$g(x) = e^{-\pi x^2}$ とおくと $\|g\|_{L^q(dx)} = \frac{1}{\sqrt{q^{\frac{1}{q}}}}$ だったから下からの評価

$$\|\mathcal{F}\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} \geq \frac{\|g\|_{L^{p'}(dx)}}{\|g\|_{L^p(dx)}} = \sqrt{\frac{p^{\frac{1}{p}}}{p'^{\frac{1}{p'}}}}$$

を得る

主定理の紹介

以下 $A_p := \sqrt{\frac{p^{\frac{1}{p}}}{p'^{\frac{1}{p'}}}}$ とおく

バベンコ・ベックナーの定理の系として、ヤングの畳み込み不等式の改良がある

定義 2.2 (畳み込み)

$\mathbb{R}$ 上の可測関数 f, g の畳み込み $f * g$ を、

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y)dy$$

で定める。

主定理の紹介

系 2.3

$p, q \in [1, 2], r \in [2, \infty]$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r}$ を満たすとする、
 $\forall f \in L^p(dx), \forall g \in L^q(dx),$

$$\|f * g\|_{L^r(dx)} \leq A_p A_q A_{r'} \|f\|_{L^p(dx)} \|g\|_{L^q(dx)}$$

証明. フーリエ逆変換も同様のノルムになるので、ヘルダーの不等式とバベンコ・ベックナーの定理より

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^r(dx)} &\leq A_{r'} \|(\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)\|_{L^{r'}(dx)} \leq A_{r'} \|\mathcal{F}f\|_{L^{p'}(dx)} \|\mathcal{F}g\|_{L^{q'}(dx)} \\ &\leq A_{r'} A_p \|f\|_{L^p(dx)} A_q \|g\|_{L^q(dx)} \end{aligned}$$



証明の準備

キーとなる定理は

証明の準備

定理 3.1 (中心極限定理)

$(\Omega, \mathcal{G}, P)$ を確率空間とする。

$\mathbb{R}^d$ -値確率変数列 $\{Z_n\}_{n=1}^\infty \subset L^\infty(P)$ は独立同分布で平均 0、共分散行列 C とする。

このとき $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Z_k$ は平均 0、共分散行列 C の正規分布 γ_C (後に、今回使う形で紹介) へ法則収束する。
つまり $\forall F \in C(\mathbb{R}^d)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[F \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Z_k \right) \right] = \int_{\mathbb{R}^2} F(x, y) \gamma_C(dx dy)$$

証明の準備

定義 3.2 (標準正規分布)

$\mathbb{R}$ 上の確率測度 γ を

$$\gamma(dx) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

で定め、標準正規分布と呼ぶ。

定義 3.3 (エルミート多項式)

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、 n 次エルミート多項式 H_n を

$$H_n(x) := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

で定める。これは n 次式になる。

定義 3.4 (エルミート乗子作用素)

$\theta \in \mathbb{C}$ を $|\theta| < 1$ なるものとし、エルミート乗子作用素 $\mathcal{H}_\theta : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$ を、

$$\mathcal{H}_\theta H_n := \theta^n H_n \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

なる線型作用素として定める。

証明の準備

簡単な考察と $\mathbb{C}[x] \subset L^p(\gamma)$ の稠密性より、 $\mathcal{H}_\theta$ は $\|\mathcal{H}_\theta\|_{L^p(\gamma) \rightarrow L^p(\gamma)} \leq 1$ なる作用素 $\mathcal{H}_\theta : L^p(\gamma) \rightarrow L^p(\gamma)$ に拡張

定義 3.5

$q \in (1, \infty)$ に対し、同型 $\mathcal{U}_q : L^q(\gamma) \longrightarrow L^q(dx)$ を

$$\mathcal{U}_q f(x) := \sqrt{q^{\frac{1}{q}}} f(\sqrt{2\pi q} x) e^{-\pi x^2}$$

で定める。

証明の準備

簡単な計算 (全てのエルミート多項式について確認するだけ) より

補題 3.6

$\theta_p := \sqrt{p-1}i$ とおく。このとき

$$\mathcal{F}\mathcal{U}_p = A_p \mathcal{U}_{p'} \mathcal{H}_{\theta_p}$$

→ エルミート乗子作用素のノルム評価に帰着された!

故に $\|\mathcal{H}_{\theta_p}\|_{L^p(\gamma) \rightarrow L^{p'}(\gamma)} \leq 1$ を示せば良いのだが、最後にひと手間加えさせてください

証明の準備

L^p - $L^{p'}$ 双対性と $\mathbb{C}[x] \subset L^2(\gamma)$ の稠密性より、次を示せば十分。

主張 3.7

$\forall \phi, \psi \in \mathbb{C}[x],$

$$|\langle \mathcal{H}_{\theta_p} \phi, \psi \rangle_{L^2(\gamma)}| \leq \|\phi\|_{L^p(\gamma)} \|\psi\|_{L^p(\gamma)}$$

やっとな証明に入ります

証明の概略

突然だが、ミンコフスキーの不等式などを用いてたくさん頑張ると、次を得る。

補題 4.1 (2点補題)

$\forall \zeta \in \mathbb{C}$,

$$\left(\frac{|1 - \theta_p \zeta|^{p'} + |1 + \theta_p \zeta|^{p'}}{2} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\frac{|1 - \zeta|^p + |1 + \zeta|^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}}$$

なんだこれは!

証明の概略

定義 4.2 (ベルヌーイ分布)

$\mathbb{R}$ 上の確率分布 β を、

$$\beta(\{1\}) = \beta(\{-1\}) = \frac{1}{2}$$

なるよう定める。

所謂 1 回の「コイン投げ」の分布

定義 4.3

$F \subset \{1\}$ に対し $\chi_F \in L^2(\beta) \cong \mathbb{C}^2$ を

$$\chi_F(x) = \begin{cases} 1 & (F = \emptyset) \\ x & (F = \{1\}) \end{cases}$$

で定義する。 $\{\chi_F | F \subset \{1\}\} \subset L^2(\beta)$ は正規直交基底。

定義 4.4 (ベルヌーイ乗子作用素)

$\theta \in \mathbb{C}$ は $|\theta| < 1$ なるものとする。ベルヌーイ乗子作用素 $\mathcal{K}_\theta : L^2(\beta) \rightarrow L^2(\beta)$ を、

$$\mathcal{K}_\theta \chi_F = \theta^{\#F} \chi_F \quad (\forall F \subset \{1\})$$

なる線型作用素として定める。

証明の概略

このとき 2 点補題は、次の不等式と同値

補題 4.5

$\forall \phi \in L^2(\beta),$

$$\|\mathcal{K}_{\theta_p} \phi\|_{L^{p'}(\beta)} \leq \|\phi\|_{L^p(\beta)}$$

実際、 $\phi(x) = 1 + \zeta x$ を代入したものになる
では次に「コインを n 回投げ」ましょう

定義 4.6

$F \subset \{1, \dots, n\}$ に対し $\chi_F \in L^2(\mathbb{R}^n, \beta^{\otimes n}) \cong \mathbb{C}^{2^n}$ を

$$\chi_F(x) = \prod_{j \in F} \chi_{\{1\}}(x_j)$$

で定義する ($F = \emptyset$ のときは 1 とする)。

$\{\chi_F | F \subset \{1, \dots, n\}\} \subset L^2(\beta^{\otimes n})$ は正規直交基底。

定義 4.7

$\theta \in \mathbb{C}$ は $|\theta| < 1$ なるものとする。 $\mathcal{K}_\theta^{\otimes n} : L^2(\beta^{\otimes n}) \longrightarrow L^2(\beta^{\otimes n})$ を、

$$\mathcal{K}_\theta^{\otimes n} \chi_F = \theta^{\#F} \chi_F \quad (\forall F \subset \{1, \dots, n\})$$

なる線型作用素として定める。

証明の概略

ミンコフスキーの積分不等式を用いて帰納法をぶん回せば、

補題 4.8

$$\forall \phi \in L^2(\beta^{\otimes n}),$$

$$\|\mathcal{K}_{\theta_p}^{\otimes n} \phi\|_{L^{p'}(\beta^{\otimes n})} \leq \|\phi\|_{L^p(\beta^{\otimes n})}$$

あとちょっと!

証明の概略

定義 4.9

線型作用素 $\mathcal{A}_n : L^2(\beta) \longrightarrow L^2(\beta^{\otimes n})$ を $\forall \phi \in L^2(\beta)$,

$$\mathcal{A}_n \phi(x_1, \dots, x_n) := \phi \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n x_k \right)$$

で定める。

中心極限定理で出てくる形!

定義 4.10

$\theta \in (0, 1)$ とする。 $\mathbb{R}^2$ 上の確率測度 β_θ を、

$$\begin{cases} \beta_\theta(\{(1, 1)\}) = \beta_\theta(\{(-1, -1)\}) = \frac{1 + \theta}{4} \\ \beta_\theta(\{(1, -1)\}) = \beta_\theta(\{(-1, 1)\}) = \frac{1 - \theta}{4} \end{cases}$$

なるものとする。

次に γ_{C_θ} を $\mathbb{R}^2$ 上の、平均 0、共分散行列 $C_\theta := \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix}$ の正規分布

(密度関数が $\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} e^{-\frac{x_1^2 - 2\theta x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-\theta^2)}}$ の分布) とする。

$\text{Cov}(\beta_\theta) = C_\theta$ である

証明の概略

確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を、 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \beta_\theta)^\mathbb{N}$ (可算無限直積確率空間) とし、 $Z_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ を第 k 射影とする
 $\rightarrow \{Z_k\}_{k=1}^\infty$ は β_θ に従う独立同分布 $\mathbb{R}^2$ -値確率変数列
 $\phi, \psi \in C(\mathbb{R})$ とし、 $F(x, y) = \phi(x)\overline{\psi(y)}$ とおく。 $\theta \in (0, 1)$ に対し

$$f_n(\theta) := \langle \mathcal{K}_\theta^{\otimes n} \mathcal{A}_n \phi, \mathcal{A}_n \psi \rangle_{L^2(\beta^{\otimes n})} = E \left[F \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Z_k \right) \right]$$

$$f(\theta) := \langle \mathcal{H}_\theta \phi, \psi \rangle_{L^2(\gamma)} = \int_{\mathbb{R}^2} F(x, y) \gamma_{C_\theta}(dxdy)$$

が成立 (1 つ目は n の帰納法、2 つ目は積分核表示で確認)。
中心極限定理 より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\theta) = f(\theta)$$

特に $\phi, \psi \in \mathbb{C}[x]$ なら

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}_n \phi\|_{L^p(\gamma)} = \|\phi\|_{L^p(\gamma)} \quad (\because \phi = 1, \psi = |\phi|^p)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\theta_p) = f(\theta_p) \quad (\because \text{複素解析的議論})$

故にヘルダーの不等式と補題 4.8 より

$$\begin{aligned} |f(\theta_p)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(\theta_p)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{K}_\theta^{\otimes n} \mathcal{A}_n \phi\|_{L^{p'}(\gamma)} \|\mathcal{A}_n \psi\|_{L^p(\gamma)} \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}_n \phi\|_{L^p(\gamma)} \|\mathcal{A}_n \psi\|_{L^p(\gamma)} = \|\phi\|_{L^p(\gamma)} \|\psi\|_{L^p(\gamma)} \end{aligned}$$

これが示すべき不等式だった。

参考文献

- Beckner, William (1975) “Inequalities in Fourier Analysis,” *Annals of Mathematics*, Vol. 102, No. 1, pp. 159–182, July, DOI: 10.2307/1970980.
- Stroock, Daniel W. (2011) *Probability Theory—An Analytic View*: Cambridge University Press, 2nd edition.
- 泉正己 (2021) 『数理科学のための 関数解析学』, ライブラリ数理科学のための数学とその展開 F5, サイエンス社.

ご清聴ありがとうございました m(_ _)m

スライド ショーの最後ですが、クリックしても終了しません。Escape キーを押してください。