

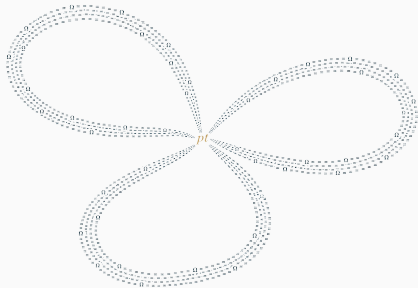
群は基点付き連結 1-型だよ。 何か問題でも？

HoTT/UF における群論

Alwe Alwe_Logic

2026 年 10 月 12 日

第 10 回すうがく徒のつどい



スライドを公開しています。

QR コードから閲覧・ダウンロードできます。

`alwe-logic.github.io/homepage/
talks/suugakuto-10/`



この発表について

- HoTT（ホモトピー型理論）の予備知識は仮定しません。
- 群論と、基本群 π_1 の定義くらいを知っていれば追えます。
- 記号の約束：
 - $:\equiv$ 定義による等しさ
 - $=$ 等式型
 - $\simeq$ 型の同値

標語

群は基点付き連結 1-型だよ。何か問題でも？

群とは対称性である

よく言われる標語

群論とは対称性の理論である。

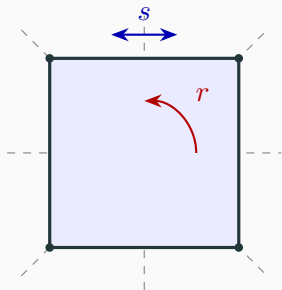
例：正方形を自分自身に重ねる合同変換の全体

$$D_4 = \{e, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s\}$$

(r : 90° 回転、 s : 鏡映) は、合成で群になる。

- 群はいつも、ある対象 X の自己同型群 $\text{Aut}(X)$ として現れる。
- 抽象群 $D_4 = \langle r, s \mid r^4 = s^2 = e, sr s = r^{-1} \rangle$ は、その X (正方形) を忘れたもの。

問い： X ごと群を扱うことはできるか？



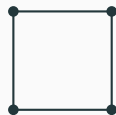
同じ四点、違う「同じ」

“No entity without identity!” — Quine

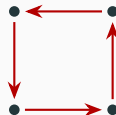
対象を語るなら、**どう同一視するか**も語ろう。



対象
同一視
自己同一視
4 元集合
全単射
 S_4 : 24 通り



正方形（頂点と辺）
隣接を保つ全単射
 D_4 : 8 通り



向き付き 4 サイクル
矢印を保つ全単射
 $\mathbb{Z}/4$: 4 通り

対象と同一視を、ひとまとまりに

自分自身との同一視が、その対象の**対称性**になる。

三つは覚えている構造が違う、**別種の対象**。その違いが、許される同一視の違いとして現れる。

群は 1 点歪群だよ、何か問題でも？

群 G から歪群 $*//G$ を作る：

- 対象は $*$ ただ一つ、射 $* \rightarrow *$ は G の元
- 合成 = 積、恒等射 = e 、逆射 = 逆元

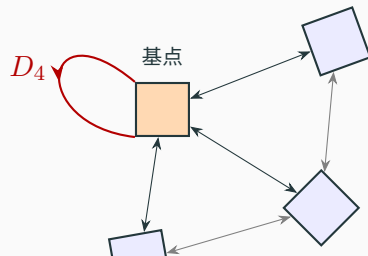
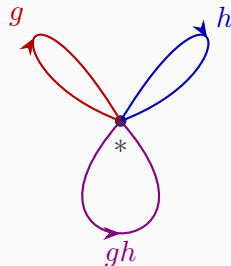
$*$ は対象 X の形式的な代役。

例：歪群 Sq （対象は平面上の一辺 1 の正方形、射はその間の等長写像）は連結で、各対象の自己同型群は D_4 。一つ選ぶと $*//D_4 \simeq Sq$ （圏同値）。

圏同値不変な言い方

「対象がただ一つ」は圏同値不変ではない（ Sq には正方形が無数にある）。

圏同値不変な 連結（どの対象も互いに同型） + 基点の選択 で言い直す。



群の元はループになる

1 点群 $*//G$ を空間として描く：

- 対象 $*$ を点に、射 g を $*$ を基点とするループにする
- 合成 gh はループをつないだもの

こうして得られる空間を BG と書く。(古典的には $K(G, 1)$ 。単体集合や CW 複体として実現でき、 $\pi_1(BG) \cong G$ かつ高次のホモトピー群は消える)

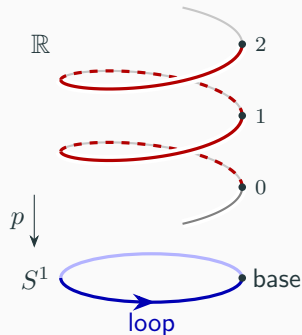
例： $B\mathbb{Z} \simeq S^1$ 。 $\text{loop}^n \leftrightarrow n$ (右図)。

古典的な定理：群 $\simeq$ 基点付き連結なホモトピー 1-型

HoTT では

型ははじめてから ∞ -群で、 $x = y$ は道のなす ∞ -群。

「群の元 = ループ」が対象言語のレベルで実装されている。



赤： loop^2 の持ち上げは 0 から 2 へ

$\text{loop}^n \mapsto n$ で $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

今日のゴール

HoTT では

型は最初からアニマ (∞ -亜群) で、1-型は亜群。

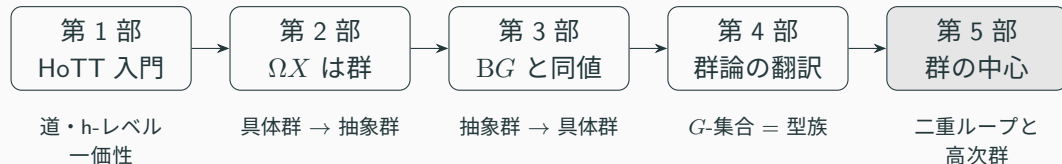
だから「連結で、基点があり、射の間の同一視が高々一通り」の型を、そのまま群の定義にできる。

主定理

$$\text{Group} \simeq \sum_{(X, \text{pt}) : \mathcal{U}_*} \text{isConn}(X) \times \text{is1Type}(X)$$

1 点亜群の言葉		型の言葉
どの対象も基点と同型 (連結)	$\leftrightarrow$	$\text{isConn}(X)$
基点の選択	$\leftrightarrow$	$(X, \text{pt}) : \mathcal{U}_*$
射の間の同一視は高々一通り	$\leftrightarrow$	$\text{is1Type}(X)$

右辺の記号を正確に読めるようにするのが、第1部のゴールです。



千里の道も refl から

第1部 猫でもわかる HoTT 入門

アニメってユートピア

型には「どんな対象があるか」と「それらをどう同一視するか」が組み込まれている。さらに同一視の間の同一視も……（ ∞ -亜群、アニメ）。

型理論	読み方
型 A	対象と等しさの集まり（アニメ）
項 $a : A$	A の対象
関数 $f : A \rightarrow B$	対象を対象に、等しさを等しさに写す
宇宙 $\mathcal{U}$	型 $A : \mathcal{U}$ を対象とするアニメ

関数は自動的にホモトピー整合的

$p : a = a'$ に $\text{ap}_f(p) : f(a) = f(a')$ が対応し、合成・逆・高次の等しさとも整合する。

集合論	関数は等しさを保つ	性質
HoTT	関数は等しさの証拠を写し、それらの整合も保つ	構造
位相空間	連続写像は道を道に写す	その類似

以後の「空間」の絵と「道」という呼び名は、この類似を借りたもの。推論規則は付録 A。

型族の肖像 — Σ と Π

型族 $B : A \rightarrow \mathcal{U}$: 各対象 $x : A$ に型 $B(x)$ を対応させる。

A 上の**束**で、 $B(x)$ がファイバー。

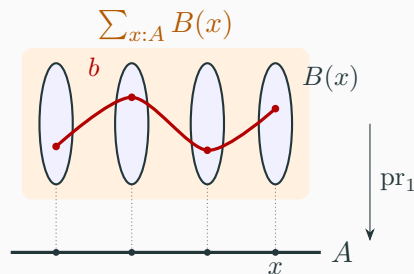
$\sum_{x:A} B(x)$: 組 (x, b) ($b : B(x)$) の全体 = **全空間**

$\prod_{x:A} B(x)$: 各 x に $b(x) : B(x)$ を選ぶ関数 = **切断**

例 : $A = \{a, b\}$

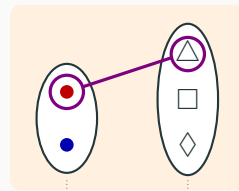
$B(a) = \{\bullet, \bullet\}$ 、 $B(b) = \{\triangle, \square, \diamond\}$ なら
 Σ は $2 + 3 = 5$ 個、 Π は $2 \times 3 = 6$ 通り。

例 : 基点付き型 $\mathcal{U}_* := \sum_{X:\mathcal{U}} X$ は族 $X \mapsto X$ の全空間。対象は組 (X, pt) 。



赤：切断

$\sum_{x:A} B(x)$: 5 個



「等しい」 だけじゃダメですか？

集合 $A = \{a, b\}$ と $B = \{1, 2\}$ を「同一視」するとは？

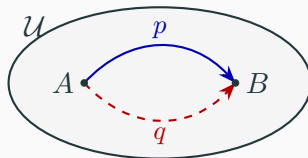
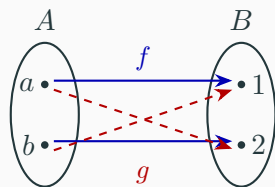
- 集合は構造を何も持たないので、集合の同型は元の一対一対応、つまり全単射。
- A, B 間の全単射は f と g の二通り。どちらを使うかで a の行き先が変わる。

構造があれば、同一視はそれを保つ同型（群なら群同型）。正確には一価性と構造同一性原理。

等しさの証拠

「 A と B は等しい」の証拠は、どう同一視するか（全単射）ごと持つ必要がある。

絵で描けば A から B への道。道の違い = 同一視の違い。



宇宙 $\mathcal{U}$ 中の 2 本の道 $p, q : A = B$

分け入っても分け入っても道

$a, b : A$ に対して等式型 $a =_A b$ がある：

a から b への道（等しさの証拠）の型。

- 定値道 $\text{refl}_a : a = a$
- 道 $p, q : a = b$ の間にも型 $p = q$: 道の間の道
- その間にも……と無限に続く

型は最初から ∞ -亜群。

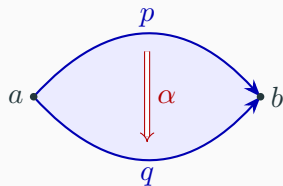
例：円周 S^1

対象 base と道 $\text{loop} : \text{base} = \text{base}$ で生成される型（作り方は省略）。

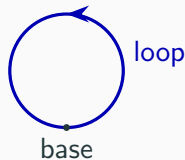
注意

loop は $\text{refl}_{\text{base}}$ と等しくない。

等式型 $\text{base} = \text{base}$ の元は refl だけではない。



$\alpha : p = q$ (道の間の道)



すべての道は refl に通ず

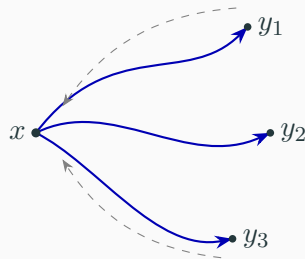
道帰納法

$x : A$ を固定する。 $y : A$ と $p : x = y$ についての主張 $P(y, p)$ をすべての y, p で示すには、 $P(x, \text{refl}_x)$ を示せば十分。

直観：端点 y ごと動かせば、どの道も refl_x に縮む (右図)。正確な形 (x から出る道のなすアニメの可縮性) は補足。

注意

両端を固定した $p : x = x$ が refl_x に等しい、とは言っていない。(S^1 の loop が反例)



端点ごと x に引き戻す

同一地理学

道帰納法から次が作れる（作り方は付録 A）：

- 合成 $p \cdot q : x = z$ ($p : x = y, q : y = z$)
- 逆 $p^{-1} : y = x$
- 関数の適用 $\text{ap}_f(p) : f(x) = f(y)$
- 輸送 $\text{tr}^B(p) : B(x) \rightarrow B(y)$

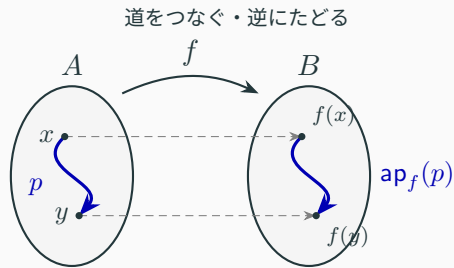
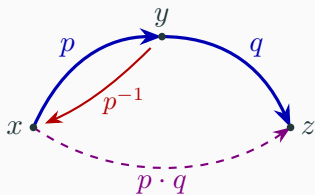
道として成り立つ等式：

$$(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r),$$

$$\text{refl}_x \cdot p = p = p \cdot \text{refl}_y,$$

$$p \cdot p^{-1} = \text{refl}_x, \quad p^{-1} \cdot p = \text{refl}_y.$$

⇒ 亜群の公理そのもの（導入の 1 点亜群）。



関数は道を道に写す（最初に言った「ホモトピー整合」

$$\text{tr}^B(p)(u)$$

私／俺たち、入れ替わってる！？

$\text{Fin}_2 := \{0, 1\}$ 、入れ替え $\sigma : 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0$ 。

「『等しい』だけじゃダメですか？」で見たように、 σ を同一視の証拠とみなし、道 $p_\sigma : \text{Fin}_2 =_{\mathcal{U}} \text{Fin}_2$ を考える（正当化は一価性）。

道の言葉

全単射の言葉

$\text{refl}_{\text{Fin}_2}$

id

輸送 $\text{tr}^{X \mapsto X}(p_\sigma) : \text{Fin}_2 \rightarrow \text{Fin}_2$

σ **そのもの**

逆 p_σ^{-1}

$\sigma^{-1} = \sigma$

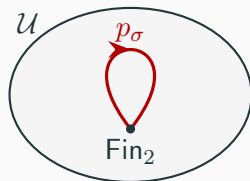
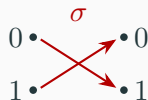
合成 $p_\sigma \cdot p_\sigma$

$\sigma \circ \sigma = \text{id}$ （つまり $= \text{refl}$ ）

$\Rightarrow \text{Fin}_2$ のまわりのループ全体 $\simeq \text{Aut}(\text{Fin}_2) \cong \mathbb{Z}/2$ 。

群がループとして現れる。

構造も運べる：自己射の族 $X \mapsto (X \rightarrow X)$ に沿って運ぶと $\text{tr}(p_\sigma)(f) = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}$ （共役、右の表）。



宇宙の中で Fin_2 のまわりを回るループ

$f : \text{Fin}_2 \rightarrow \text{Fin}_2 \quad \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}$

id

id

σ

σ

定値 c_0

c_1

定値 c_1

c_0

Σ 型の等しさ

Σ 型の等しさ ($B : A \rightarrow \mathcal{U}$)

$$((a, b) =_{\Sigma_x B(x)} (a', b')) \simeq \sum_{p: a=a'} (\text{tr}^B(p)(b) = b')$$

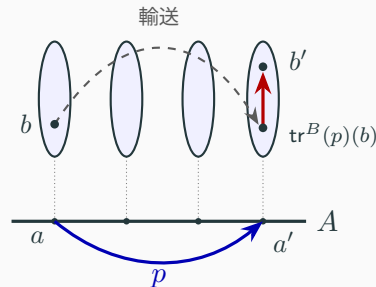
- 第 1 成分：底の道 $p : a = a'$ 。
- 第 2 成分： $b : B(a)$ と $b' : B(a')$ は型が違い、 $b = b'$ とは書けない。 p で運んでから比べる。

証明はどの向きも道帰納法（左から右の第 1 成分は ap_{pr_1} ）。

部分型：各 $B(x)$ が命題なら

$$((a, b) = (a', b')) \simeq (a = a')。$$

命題で切り出した型（具体群、BG など）の等しさは台だけ見ればよい。



底の道 p と、運んだ先から b' への
ファイバーの中の道の組

集合と 1-型

- 集合：等しさ $x = y$ が命題（証拠は高々一つ）
- 1-型：道の型 $x = y$ が集合

S^1 は $\text{loop} \neq \text{refl}$ なので集合ではない。

一方、連結性と $\Omega S^1 \simeq \mathbb{Z}$ から 1-型。

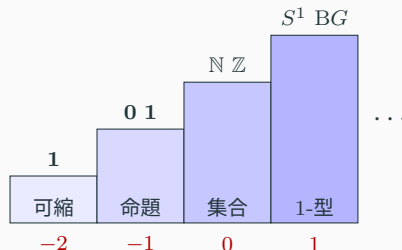
一般に「等式型が一つ下のレベル」の繰り返し：

$$\text{isContr}(A) \equiv \sum_{a:A} \prod_{x:A} (a = x)$$

$$\text{isProp}(A) \equiv \prod_{x,y:A} \text{isContr}(x = y)$$

$$\text{isSet}(A) \equiv \prod_{x,y:A} \text{isProp}(x = y)$$

$$\text{is1Type}(A) \equiv \prod_{x,y:A} \text{isSet}(x = y)$$



赤：何-垂群か

可縮 $\subset$ 命題 $\subset$ 集合 $\subset$ 1-型 $\subset \dots$

Only connect...

命題切り詰め：任意の型 A から命題 $\|A\|$ を作る。「 A に対象がある」ことだけを残し、**どの対象かは忘れる**。

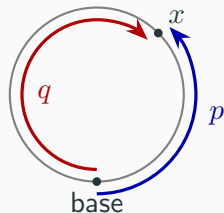
論理としての読み：命題 = isProp な型。

論理	$\forall$	$\Rightarrow$	$\wedge$	$\exists$	$\vee$
型	Π	$\rightarrow$	$\times$	$\ \Sigma\ $	$\ +\ $

連結性（基点付き型 (X, pt) に対して）

$$\text{isConn}(X) := \prod_{x:X} \|\text{pt} = x\|$$

どの対象にも基点からの道がある。ただし**どの道かは選ばない**。



$p \neq q$ だが、 $\|\text{base} = x\|$ は成り立つ
切り詰めを外した $\prod_x (\text{pt} = x)$ は
「可縮」になってしまう

等しさから同値性へ

同値 : $f : A \rightarrow B$ が同値 $\equiv$ 各 $b : B$ で、ファイバー

$\text{fib}_f(b) \equiv \sum_{a:A} (f(a) = b)$ が可縮。

$A \simeq B \equiv \sum_f \text{isEquiv}(f)$ 。

逆射と同値性 :

$\text{isEquiv}(f) \simeq (\sum_g f \circ g = \text{id}_B) \times (\sum_h h \circ f = \text{id}_A)$ (右逆と左逆の組。右辺も命題)。とくに**両側逆射があれば同値** (HoTT Book 4.2–4.4 節)。

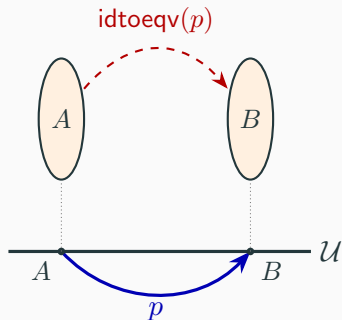
定義 : **埋め込み** $\Leftrightarrow$ 各 $\text{fib}_f(b)$ が命題。 **全射** $\Leftrightarrow$ 各 b で $\|\text{fib}_f(b)\|$ 。同値 $\Leftrightarrow$ 埋め込みかつ全射。 $\text{isEquiv}(f)$ は命題。

自然な射

$\text{idtoeqv} : (A =_{\mathcal{U}} B) \rightarrow (A \simeq B)$

$\text{idtoeqv}(p) \equiv \text{tr}^{X \mapsto X}(p)$

型族 $X \mapsto X$ (各 X の上に X 自身) に沿った**輸送**。



A の上のファイバーは A 自身

輸送は同値 (両側逆射 $\text{tr}(p^{-1})$ があるので)、 $\text{refl}_A \mapsto \text{id}_A$ 。 **道帰納法だけで作れる** (一価性は不要)。

一価性公理

一価性公理

自然な射 $\text{idtoeqv} : (A =_{\mathcal{U}} B) \rightarrow (A \simeq B)$ は同値である。逆射を $\text{ua} : (A \simeq B) \rightarrow (A =_{\mathcal{U}} B)$ と書く：

$$\text{tr}^{X \mapsto X}(\text{ua}(e)) = e, \quad \text{ua}(\text{idtoeqv}(p)) = p$$

- 道 $\rightarrow$ 同値はもともとある。公理が要請するのは「逆向きもあり、ちょうど一対一」。「同一視の証拠」は、同値性の証拠、すなわち同値射と過不足なく対応する。
- $\text{Fin}_2 = \text{Fin}_2$ の例の p_σ は $\text{ua}(\sigma)$ 。輸送が σ そのものだったのは上の左の式による。

一価性公理からの帰結

1. 構造同一性原理：構造を保つ同値（群なら群同型）を、本当に「等しさ」として扱える。
2. 集合 A, B なら $(A = B) \simeq (A \simeq B)$ は全単射の集合。よって Set は 1-型（第3部で BG が 1-型になる理由）。

対称性としての群：具体群

定義（具体群）

$$\text{ConcGroup} := \sum_{(X, \text{pt}) : \mathcal{U}_*} \text{isConn}(X) \times \text{is1Type}(X)$$

記号	意味
$\mathcal{U}_*$	基点付き型 $\sum_{X:\mathcal{U}} X$
$\sum$	全空間（組の全体）
$\text{isConn}(X)$	どの対象にも基点から道がある
$\text{is1Type}(X)$	道の間の道が高々一通り

後ろの二つは命題なので、**連結な基点付き 1-型**の全体。

例

- (S^1, base)
- $(\sum_{X:\text{Set}} \|X = \text{Fin}_2\|, \text{Fin}_2) : 2 \text{ 元集合全体}$
- $(1, \star)$

$\Rightarrow \text{pt} = \text{pt}$ はいつ**群**になるか？

道から生まれる群

第2部 ループ空間と群構造

ループザ pt

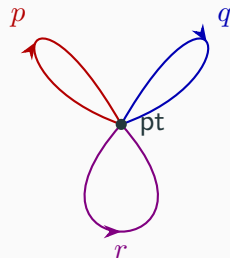
基点付き型 $(X, \text{pt}) : \mathcal{U}_*$ に対して

$$\Omega(X, \text{pt}) \equiv (\text{pt} =_X \text{pt})$$

基点 pt から出て pt に戻るループの型。 ΩX 自身も refl_{pt} を基点とする基点付き型。

例

- $\Omega(S^1, \text{base}) \simeq \mathbb{Z}$ (導入の螺旋の図)
- $\Omega(\mathcal{U}, \text{Fin}_2) \simeq \mathbb{Z}/2$ ($\text{Fin}_2 = \text{Fin}_2$ の例)
- $\Omega(1, \star) \simeq 1$



ΩX の対象 = pt を通るループ

問い

ΩX はいつ群になるか？

ループ&ループ

道の合成・逆が、そのまま ΩX の演算になる：

単位元 refl_{pt} , 積 $p \cdot q$, 逆元 p^{-1} .

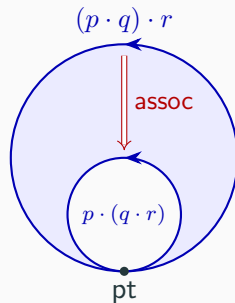
公理にあたる等式は道として成り立つ：

$$\begin{aligned}\text{assoc} : (p \cdot q) \cdot r &= p \cdot (q \cdot r), \\ \text{refl} \cdot p &= p, \quad p^{-1} \cdot p = \text{refl}, \dots\end{aligned}$$

まだ群とは言えない

ΩX は集合とは限らないので、まだ通常の群ではない。

高次の整合性自体は道帰納法から得られる。



結合律の証拠は道の間の道（2 次元）

対称性としての群：抽象群

抽象群：集合 G と演算 e, m, i の組で、群の公理をみたすもの（型としての定義は補足）。台が**集合**なので各公理は命題：**公理の証拠の選び方を気にしなくてよい**。

定理

$(X, \text{pt}) : \mathcal{U}_*$ が 1-型なら、 $(\Omega X, \text{refl}_{\text{pt}}, \cdot, {}^{-1})$ は群である。

証明： $\text{is1Type}(X)$ の定義で $x = y = \text{pt}$ とおけば ΩX は集合。公理は、道として成り立つ等式としてすでにある。集合なので、これで十分。□

演算はどこから来たか

群を定義するのに、演算を直接与える必要はない。演算は**道の合成**から出てくる。

こうして $\Omega : \text{ConcGroup} \rightarrow \text{Group}$ を得る。例： $S^1 \mapsto \mathbb{Z}$ 、2 元集合全体 $\mapsto \mathbb{Z}/2$ 。

主定理： Ω は型の同値。群の等しさ = 群同型（構造同一性原理、補足）

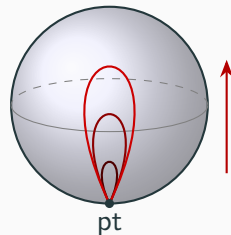
連結・1-型には理由がある

連結性： Ω は基点の連結成分しか見ない。

$S^1 \sqcup S^1$ でも S^1 でも $\Omega \simeq \mathbb{Z}$ 。連結性がないと Ω は単射にならない。「 Ω から見えない余計な部分を捨てる」条件。

1-型性： ΩX が集合になるための条件。

S^2 は連結だが 1-型でない。refl = refl に非自明な元があり ($\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$)、 ΩS^2 は集合でない。



定値ループから球面を一周して

定値ループに戻る：surf : refl = refl

群のいる場所

第3部 torsor から BG へ

抽象群から具体群へ

抽象群 G から、具体群 BG を作りたい。

方法はいくつかある：

- 高次帰納型 $K(G, 1)$ (Licata–Finster)
- $*//G$ の Rezk 完備化 (Ahrens–Kapulkin–Shulman)
- G -torsor 全体の型 (Symmetry 本)

米田経由の Rezk 完備化も torsor の型。宇宙の扱いは補足。

torsor による構成

一価性と命題切り詰めで、一つ上の宇宙に構成できる。

導入の垂群 Sq と同じ作り方 (右)。

正方形の垂群 Sq	BG
正方形	G -torsor
等長写像	G -同変全単射
選んだ正方形	G 自身
自己同型群 D_4	G

Sq ：基準の正方形 S_0 と合同なものを全部集め、等長写像で同一視する。 S_0 の自己同型が D_4 。

BG ：基準の G -集合 G と同型なもの (torsor) を全部集め、同変全単射で同一視する。 G の自己同型が G 。

どちらも「基準と同じ形のもの」全体を集めている。

群は作用させてこそ

G -集合：集合 X と左作用 $G \times X \rightarrow X$ ($e \cdot x = x$ 、 $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$) の組。

$$G\text{-Set} := \sum_{X:\text{Set}} \sum_{\alpha:G \rightarrow X \rightarrow X} (\text{単位律} \times \text{結合律})$$

例： G 自身（左乗法）、剰余集合 G/H 、一点集合 1 （自明な作用）。

等しさ（構造同一性原理）

$$((X, \alpha) =_{G\text{-Set}} (Y, \beta)) \simeq \sum_{e:X \simeq Y} \prod_{g,x} e(g \cdot x) = g \cdot e(x)$$

G -集合の間の道 = **G -同変な全単射**。

同変全単射は集合をなすので、 $G\text{-Set}$ は **1-型**（ Set が 1-型だったのと同じ理由）。

主 G -集合： G 自身を左乗法で G -集合とみなしたものの。これも G と書く。

定義 (G -torsor)

$$X \text{ が } G\text{-torsor} :\Leftrightarrow \|X =_{G\text{-Set}} G\| \quad (X : G\text{-Set})$$

読み方

- $X =_{G\text{-Set}} G$ は、同変全単射 $G \simeq X$ のなす集合（構造同一性原理）。
- $\| \cdot \|$ で包むので、そういう同型が**あること**だけを要求し、**どれか**は選ばない。
- 「 X は torsor である」は**命題**。

torsor の直観：原点を忘れた G

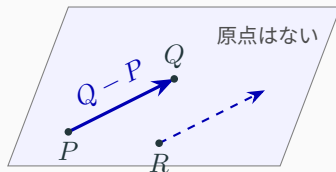
古典的な定義との一致： X が torsor $\Leftrightarrow \|X\|$ (X に対象がある) かつ、任意の $x, y : X$ に $g \cdot x = y$ となる $g : G$ が**ただ一つ**。2 点の「差」が G の元として決まる。

原点を選べば $G : x : X$ を選ぶと $g \mapsto g \cdot x$ で $G \simeq X$ 。ただし選び方は一意でない。

$\Rightarrow$ 同型はあるが**選ばない**。これが定義の $\|X = G\|$ 。

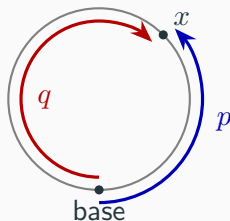
例

- ベクトル空間 V 上の**アフィン空間**は加法群 V の torsor (点の差はベクトル)。
- (base = x) は $\mathbb{Z}$ -torsor (右図)。一般に、具体群 (X, pt) では $(\text{pt} = x)$ は ΩX -torsor。
- 標準の正方形 S_0 から S への合同写像の全体は D_4 -torsor。



アフィン空間：2 点の差は V の元。

同じベクトルはどの点にも作用する (点線)



p と q の差はループ (巻き数)。

どれが「0 番目の道」かは決まらない

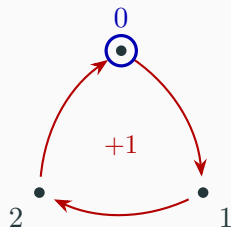
巡回する3点、基点はまだない

3点集合 X に、 $1 \in \mathbb{Z}/3$ が「矢印に沿って一つ進む」作用を与える。頂点に番号は付いていない。

原点 x_0 を一つ選ぶと、初めて $x_0, 1 \cdot x_0, 2 \cdot x_0$ に $0, 1, 2$ と番号が付く。原点の選び方は3通り。

対象	自己同型群
構造のない3点集合	S_3
巡回する向き付きの3点集合	$\mathbb{Z}/3$

「3点ある」だけでは足りない。どの構造を保って同一視するかで群を決める。作用を覚えておくことで、欲しい対称性 $\mathbb{Z}/3$ が取り出せる。



矢印に沿って一つ進むのが $\mathbb{Z}/3$ の作用。
どの点も特別ではない原点（青）を選ぶと番号が付く。

選び方は3通りで、どれも同等

BG の定義

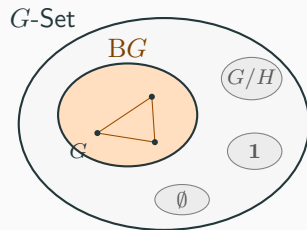
G -torsor 全体の型に、基点 G を付ける。

定義

$$BG \equiv \sum_{X:G\text{-Set}} \|X = G\|, \quad \text{pt} \equiv (G, |\text{refl}_G|)$$

BG の対象は組 $(X, h) : G\text{-集合 } X \text{ と、} G \text{ と同型であることの証拠 } h : \|X = G\|$ 。

$G\text{-Set}$ の中で G を含む連結成分を切り出したもの (右図)。



G を含む連結成分だけを切り出す

BG の対象 = $G\text{-torsor}$

主張

(BG, pt) は連結な 1-型: $\prod_{y:BG} \|\text{pt} = y\|$ で、各 $y = y'$ は集合。

直観: どの torsor も原点を選べば G と同一視できる。ただし原点は選ばない (だから $\|\cdot\|$)。

連結性の証明 $y:BG$ を取る。 Σ 型なので $y \equiv (X, h)$ ($X:G\text{-Set}$, $h:\|X = G\|$) としてよい。

1. 目標 $\|\text{pt} = (X, h)\|$ は命題なので、 h から道 $p: X = G$ を取り出してよい (命題切り詰めの使い方)。
2. $\text{pt} \equiv (G, |\text{refl}_G|)$ から (X, h) への道を、 Σ 型の等しさで作る。第 1 成分は $p^{-1}: G = X$ 。第 2 成分 $\text{tr}^{Y \mapsto \|Y = G\|}(p^{-1})(|\text{refl}_G|) = h$ は、 $\|X = G\|$ が命題なので成り立つ。
3. こうして得た道 $r: \text{pt} = (X, h)$ から $|r|: \|\text{pt} = (X, h)\|$ 。 □

1-型性: 部分型の等しさで $(y = y') \simeq (\text{pr}_1 y = \text{pr}_1 y')$ 。右辺は 1-型 $G\text{-Set}$ の道の型なので集合。

群は基点付き連結 1-型だよ。何か問題でも？

主定理

$\Omega : \text{ConcGroup} \rightarrow \text{Group}$ と

$B : \text{Group} \rightarrow \text{ConcGroup}$ は互いに逆。よって

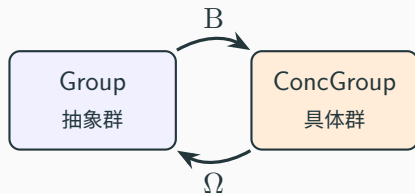
$$\text{ConcGroup} \simeq \text{Group}$$

$\Omega \circ B = \text{id}$: 群同型 $\Omega(BG) \cong G$ と、構造同一性原理 (群同型 $\Rightarrow \text{Group}$ の中の道)。

$B \circ \Omega = \text{id}$: 各対象 x を道の torsor ($\text{pt} = x$) に送る。

型の同値であること

型の同値なので、一価性で $\text{ConcGroup} = \text{Group}$ 。
群の性質はそのまま具体群に運べる。



往復すると元に戻る

主定理の証明： $\Omega(BG) \simeq G$

主張

$$\Omega(BG) \stackrel{(i)}{\simeq} (G =_{G\text{-Set}} G) \stackrel{(ii)}{\simeq} \text{Aut}_G(G) \stackrel{(iii)}{\simeq} G$$

合成は群同型。 BG のループは、ちょうど G の元。

(i) 部分型の等しさ (ii) 構造同一性原理 (iii) 下の計算 ($f \mapsto f(e)$)

(iii) 同変な自己同型は右乗法

$f : G \rightarrow G$ が G -同変 ($f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$) なら、任意の $x : G$ について

$$f(x) = f(x \cdot e) = x \cdot f(e).$$

つまり f は $a \equiv f(e)$ の右乗法 $R_a : x \mapsto x a$ そのもの。

逆に R_a は同変： $g(x a) = (g x) a$ 。よって $f \mapsto f(e)$ と $a \mapsto R_a$ は互いに逆。

約束： $p \cdot q$ は「 p の次に q 」、作用は左作用（群同型になることの照合は補足）。

各対象を道の torsor で記述する

目標 ($B \circ \Omega = \text{id}$) : 具体群 (X, pt) を、 $G := \Omega X$ から作った BG と比べたい。まず射 $f : X \rightarrow BG$ が要る。 BG の対象は G -torsor なので、各対象 $x : X$ に G -torsor を一つ対応させたい。

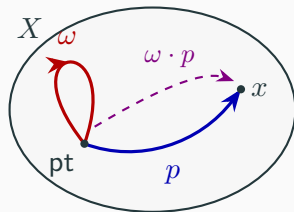
アイデア：基点からの道の集合

$x \mapsto (\text{pt} = x)$ 。 G は左からの合成 $\omega \cdot p$ で作用する。

torsor の直観の例 「(base = x) は $\mathbb{Z}$ -torsor」 「 S_0 から S への合同写像は D_4 -torsor」 と同じ形。

これは G -torsor : 道 $p : \text{pt} = x$ を一つ選ぶと、 $\omega \mapsto \omega \cdot p$ が同変全単射 $G \simeq (\text{pt} = x)$ (逆は $q \mapsto q \cdot p^{-1}$)。示すのは命題 $\|(\text{pt} = x) = G\|$ なので、 p は連結性から取り出してよい。

よって $f(x) := (\text{pt} = x)$ で $f : X \rightarrow BG$ が定まり、 $f(\text{pt}) = (\text{pt} = \text{pt}) = G$ 。



道 p の前にループ ω をつなぐ : G の作用

主定理の証明： $X \simeq B(\Omega X)$

$f : X \rightarrow_* BG$ 、 $f(x) \equiv (\text{pt} = x)$ 。

ループで見ると恒等写像

Ωf と $\Omega(BG) \cong G$ の合成は、輸送と単位元での評価：

$$p \longmapsto (q \mapsto q \cdot p) \longmapsto \text{refl} \cdot p = p.$$

$G \equiv \Omega X$ 上の恒等写像になるので、 Ωf は同値。

補題

基点付き連結型の間の基点付き射 f で、 Ωf が同値なら、 f も同値（証明は付録 C-2）。

直観：基点で道を過不足なく捉えれば、連結性によって全体も捉えられる。

よって f は基点付き同値。一価性から具体群として $X = B(\Omega X)$ 。

$\Omega \circ B = \text{id}$ と合わせて、**主定理**が示された。

$$\mathrm{Hom}(G, H) \simeq (BG \rightarrow_* BH)$$

- $\leftarrow$: 基点付き射 f に、ループ空間の間の射 Ωf を対応させる。
- $\rightarrow$: torsor の誘導 $X \mapsto H \times_G X$ (証明は省略)。

基点を忘れると

$$\|BG \rightarrow BH\|_0 \simeq \mathrm{Hom}(G, H) / (H \text{ による共役})$$

- 1点亜群で言えば：準同型 = 関手 $*//G \rightarrow *//H$ 、関手の間の自然同型 = 共役を与える元 $h \in H$ 。
- 基点は「単位元をどこに置くか」の情報。忘れると共役の分だけ曖昧になる。

(1) $B\mathbb{Z} \simeq S^1$

(S^1, base) は連結 1-型で $\Omega S^1 \simeq \mathbb{Z}$ (証明は省略)。主定理より、 $\mathbb{Z}$ -torsor 全体の型は円周。

(2) 対称群

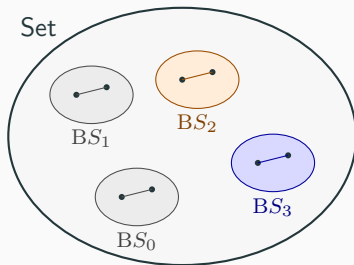
$$BS_n \simeq \sum_{X:\text{Set}} \|X = \text{Fin}_n\| \quad (n \text{ 元集合全体の型})$$

一価性より $(\text{Fin}_n = \text{Fin}_n) \simeq \text{Aut}(\text{Fin}_n)$ 。

群同型は $p \mapsto \text{idtoeqv}(p)^{-1}$: 逆を取って合成順序を合わせる。

(3) 一般に：集合 A を含む宇宙の連結成分

$\sum_{X:\mathcal{U}} \|X = A\|$ は $\text{BAut}(A)$ 。 $n = 2$ が $\text{Fin}_2 = \text{Fin}_2$ の例。



有限集合の部分は「 n 元集合全体」の成分に分かれ、各成分が BS_n

型から始める群論入門

第4部 作用・不動点・安定化群

型族としての G -集合

$$G\text{-Set} \simeq (BG \rightarrow \text{Set})$$

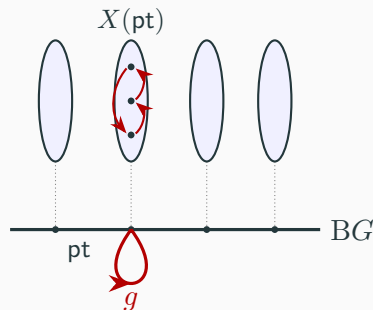
台の集合は基点上のファイバー $X(\text{pt})$ 。ループに沿った**輸送**が、その元を置換する。

左作用の約束 ($G \cong \Omega(BG)$ とみなす)：

$$g \cdot x \equiv \text{tr}^X(g^{-1})(x).$$

$\text{tr}(p \cdot q) = \text{tr}(q) \circ \text{tr}(p)$ なので、逆ループに沿って運ぶと左作用になる。

被覆空間の分類：BG 上の「ファイバーが集合の束」が G -集合。



ループ g に沿って運ぶと、 $X(\text{pt})$ の元が入れ替わる

$X : BG \rightarrow \text{Set}$ を G -集合とする。

古典的な群論	型の言葉
G -集合 X	型族 $X : BG \rightarrow \text{Set}$
不動点集合 X^G	切断 $\prod_{z:BG} X(z)$
作用歪群 $X//G$	全空間 $\sum_{z:BG} X(z)$

作用歪群（対象 X 、射 $g : x \rightarrow g \cdot x$ ）の成分が軌道、ループが安定化群。

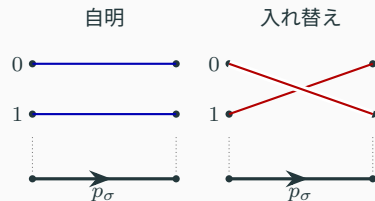
なぜ不動点 = 切断か： BG は連結なので、切断は基点での値 $x : X(\text{pt})$ で決まる。その値はどのループ g に沿って運んでも変わらない： $g \cdot x = x$ 。

部分群・剰余・半直積などの対応は補足。

計算してみる： Fin_2 への二つの作用

$G = \mathbb{Z}/2 = S_2$ 、 BG は 2 元集合の型。 Fin_2 への二つの作用を型族 $P : BG \rightarrow \text{Set}$ で比べる。

	自明な作用	入れ替える作用
型族 $P(X)$	Fin_2 (定数)	X
基点上のファイバー	Fin_2	Fin_2
p_σ に沿った輸送	恒等写像	入れ替え σ
切断 $\prod_X P(X)$	2 個	ない
全空間 $\sum_X P(X)$	$BG \sqcup BG$	可縮
軌道・安定化群	2 つ $\cdot \mathbb{Z}/2$	1 つ $\cdot$ 自明



両端は同じ基点 Fin_2 。一周して戻ると
右では 0 と 1 が入れ替わる

切断：基点で 0 を選んでも、入れ替える作用では一周すると 1 になる。だから切断は**ない**。
自明な作用なら 0 でも 1 でもよい。**全空間**：入れ替える作用の作用歪群では、任意の 2 点の間に射がちょうど一つ。だから**可縮**。成分が軌道、ループが安定化群。

ポイント

ファイバーの集合が同じでも、**道に沿ってどう運ばれるか**で型族は違う。

使ってみる (1) : 一様に一点は選べない

S_n の n 点への作用は、型族 $X \mapsto X$ ($X : BS_n$ は n 元集合)。

不動点 = 切断

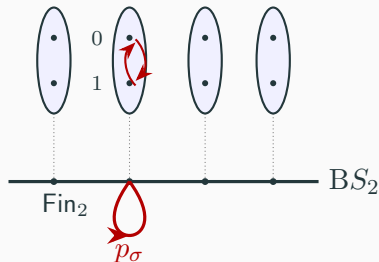
$\prod_{X:BS_n} X$ は「すべての n 元集合から一様に一点を選ぶ」こと。 $n \geq 2$ なら S_n の作用に不動点はないので、そのような選び方はない。

$n = 2$ は「入れ替える作用」の場合：

$ES_2 := \sum_{X:BS_2} X \rightarrow BS_2$ (普遍二重被覆) に切断はない。各 X は $\|X\|$ をみたすので $\neg\neg X$ 。よって

$$\neg \prod_{A:\mathcal{U}} (\neg\neg A \rightarrow A), \quad \neg \prod_{A:\mathcal{U}} (A + \neg A)$$

型レベルの排中律は偽。命題に限った排中律は一価性と矛盾しない (HoTT Book §3.2, §3.4)。



ループ p_σ に沿って運ぶと 0 と 1 が入れ替わる：
どちらかを一様に選ぶことはできない

使ってみる (2) : 軌道・安定化群定理

例： S_3 の 3 点への作用。全空間は

$$\sum_{X:BS_3} X = \text{基点付き 3 元集合の全体} \simeq BS_2$$

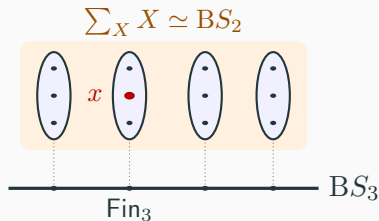
$(X, x) \mapsto X \setminus \{x\}$ (残りの 2 点) が同値。安定化群は S_2 、軌道は一つ、 $|S_3|/|S_2| = 3$ 。

一般に

推移的な G -集合 X と $x : X(\text{pt})$ に対して

$$B\text{Stab}(x) \simeq \sum_{z:BG} X(z)$$

全空間は連結 (推移的) な基点付き 1-型で、そのループが安定化群。



点の一つ選ぶと、残りは 2 元集合

軌道・安定化群定理

両辺の BG への射影の、基点上のファイバーを比べる：

$$G/\text{Stab}(x) \simeq X(\text{pt}), \quad g \mapsto g \cdot x$$

群の中心で可換とさけぶ

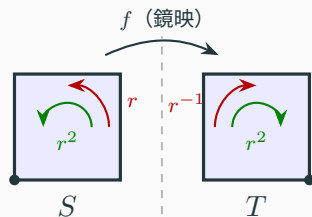
第5部 中心・二重ループ・高次群

ただ、物事があべこべに進むの

正方形 S ごとに対称性 $z_S : S \rightarrow S$ を選び、どの合同写像 $f : S \rightarrow T$ とも $f \circ z_S = z_T \circ f$ となるもの（一斉に効く対称性）を考える。型の言葉では $\Pi_S(S = S)$ の元（ S は正方形の型 BD_4 を動く）。

候補を試す：

- 恒等変換と 180° 回転 r^2 ：どの f とも両立する（緑）。
- 90° 回転 r ：鏡映で写すと逆回りになる（赤）。
 $sr s^{-1} = r^{-1} \neq r$ 。
- 鏡映：回転で写すと別の軸の鏡映になる。



黒い点は頂点の目印。鏡映 f で写すと、
 180° 回転は 180° 回転のまま、
 90° 回転は逆回りになる

結論

$$Z(D_4) = \{e, r^2\} \cong \mathbb{Z}/2.$$

中心とは、**どう同一視しても整合する自己対称性**。

中心：共役作用の不動点

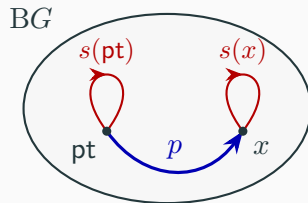
一般の群で：共役作用 = 型族 $x \mapsto (x = x)$ ($x : BG$)。

中心 = 不動点 = 切断

$$Z(G) \simeq \prod_{x:BG} (x = x)$$

切断 s の基点での値 $a \equiv s(\text{pt}) : G$ 。ループ g に沿って運ぶと $g^{-1} a g$ (道帰納法)。切断 $\Leftrightarrow$ すべての g で $g^{-1} a g = a$: a は中心の元。

例： $\prod_{X:BS_n} (X = X) = n$ 元集合に一斉に作用する自然な置換。 $Z(S_2) = \mathbb{Z}/2$ (入れ替えも自然)、 $Z(S_n) = 1$ ($n \geq 3$)。



切断 s : 各対象 x にループ $s(x)$ 。
道 p に沿って運ぶと $p^{-1} \cdot s(\text{pt}) \cdot p = s(x)$

中心は群を 2 回紐解く

$$Z(G) \simeq \prod_{x:BG} (x = x) \stackrel{(i)}{\simeq} (\text{id}_{BG} = \text{id}_{BG}) \stackrel{(ii)}{\simeq} \Omega^2(\mathcal{U}, BG)$$

(i) 関数外延性

関数の等しさは各 x での等しさ： $(f = g) \simeq \prod_x f(x) = g(x)$ 。一価性から導ける。
 $f = g = \text{id}$ とおくと $(\text{id} = \text{id}) \simeq \prod_x (x = x)$ 。

(ii) 一価性

$\Omega(\mathcal{U}, BG) = (BG = BG) \simeq (BG \simeq BG)$ で、 refl は id に対応する。もう一度ループを取ると $(\text{refl} = \text{refl}) \simeq (\text{id} = \text{id})$ (同値であることは命題)。

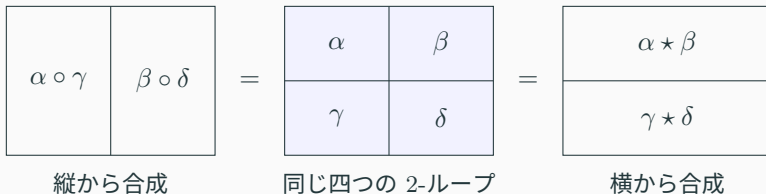
まとめると

群の中心は、宇宙の中の BG の二重ループ。

Eckmann–Hilton：縦から見るか、横から見るか

$\Omega^2(Y, y) = (\text{refl}_y = \text{refl}_y)$ の元を、境界が定値道の正方形で描く。

縦の合成 $\circ$ は上下の貼り合わせ、横の合成 $\star$ は左右の貼り合わせ。共通の単位は $e := \text{refl}_{\text{refl}_y} \circ$



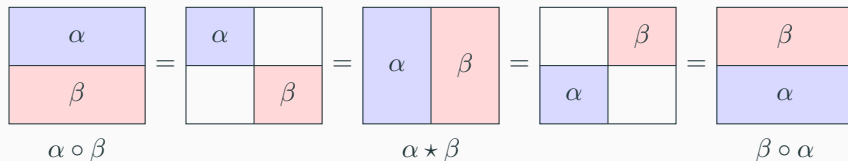
交換則：縦・横どちらから合成しても同じ

$$(\alpha \circ \gamma) \star (\beta \circ \delta) = (\alpha \star \beta) \circ (\gamma \star \delta)$$

縦は道の間の道の合成、横は下のループの合成に沿う貼り合わせ。交換則は道帰納法から従う。

Eckmann–Hilton：ぐるぐる理論

空欄は共通の単位 $e = \text{refl}_{\text{refl}_y}$ 。単位律と交換則だけで、上下を交換できる。



(1) 図の左半分：二つの合成は一致する。

$$\alpha \circ \beta = (\alpha \star e) \circ (e \star \beta) \stackrel{\text{交換則}}{=} (\alpha \circ e) \star (e \circ \beta) = \alpha \star \beta$$

(2) 図の右半分：単位を逆側に入れると、順序が入れ替わる。

$$\alpha \star \beta = (e \circ \alpha) \star (\beta \circ e) \stackrel{\text{交換則}}{=} (e \star \beta) \circ (\alpha \star e) = \beta \circ \alpha$$

等号は道としての同一視。(1) と (2) をつなぐと $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ 。

Eckmann–Hilton：中心は可換

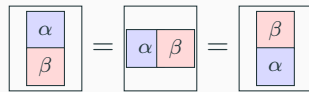
同値 $Z(G) \simeq \Omega^2(\mathcal{U}, BG)$ は積も保つ：中心の積は切断の対象ごとの道の合成に対応し、関数外延性と一価性で二重ループの合成に移る。

Eckmann–Hilton を $Y = \mathcal{U}$, $y = BG$ に適用すると：

$$Z(G) \simeq \Omega^2(\mathcal{U}, BG) \implies Z(G) \text{ は可換}$$

古典的な「中心は可換」が、二回デループできることから出てくる。

非可換群は二回デループできない。可換群はいくらでもデループできる（右下）。中心の分類型の明示的な形は補足。



2次元のループは互いに回り込める $\Rightarrow$ 可換

$$\text{非可換群} \quad G \xleftarrow{\Omega} BG \dashleftarrow \times$$

$$\text{可換群} \quad A \xleftarrow{\Omega} BA \xleftarrow{\Omega} B^2A \longleftarrow \cdots$$

展望：自己同型の間にも射がある

G の自己同型を集め、共役を射として残す。

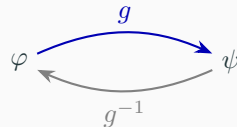
対象：群の自己同型 $\varphi : G \rightarrow G$ 。

射： $g \in G$ による共役

$$\varphi \xrightarrow{g} \psi \iff \psi(x) = g\varphi(x)g^{-1} \quad (\forall x).$$

射はすべて可逆。自己同型の合成は射とも両立する。

これが自己同型 2-群 $\text{Aut}_2(G)$ 。



$$\text{id}_G \curvearrowright z \in Z(G)$$

外部自己同型群と中心が、ここから読める

対象を射で同一視すると $\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$ 。

id_G から自分自身への射は $gxg^{-1} = x$ を満たす g 、つまり $Z(G)$ 。

型の言葉では $\text{Aut}_2(G) \simeq (BG \simeq BG)$ 。ここでは基点を忘れる。

展望：自己同型は一つ、自己同一視は二つ

$G = \mathbb{Z}/2 = \{0, 1\}$ では、群の自己同型は id_G だけ。

G は可換なので、 $g = 0, 1$ のどちらも
 $g + x - g = x$ を満たす。これらが id_G から自分自身への異なる二つの射になる。

0 は恒等の射、1 は非自明な射。
射の合成は足し算で、 $1 + 1 = 0$ 。

$$0 \xrightarrow{\text{id}_G} 1$$

対象は一つでも、
射の情報が残る

こうした「群」も、型として扱いたい

自己同型 2-群の台は、一般に集合ではなく 1-型。
分類型は、普通の群では 1-型、2-群では 2-型になる。

分類型の 1-型という条件を外せば、高次群をまとめて定義できる：

$$\infty\text{Grp} \equiv \sum_{(X, \text{pt}): \mathcal{U}_*} \text{isConn}(X).$$

応用：普通の群の拡大を分類する

群拡大に B を取ると、ファイバー列になる：

$$1 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow Q \rightarrow 1 \quad \rightsquigarrow \quad BN \longrightarrow BE \longrightarrow BQ.$$

Schreier 理論を、型族の言葉で

拡大を与えることは、次のデータを与えることと同値：

$$F : BQ \rightarrow \mathcal{U}, \quad F(\mathrm{pt}_Q) \simeq BN.$$

全空間 $BE \simeq \sum_{z:BQ} F(z)$ から、 $E = \Omega BE$ を復元する。

輸送は BN の基点なしの自己同値を与え、弱い準同型 $Q \rightarrow \mathrm{Aut}_2(N)$ として読める。

例： $N = Q = \mathbb{Z}/2$ 。同じ底とファイバーでも、全空間は $B(\mathbb{Z}/4)$ または $B((\mathbb{Z}/2)^2)$ 。
二つの拡大を区別するのは、輸送の積を比較する同一視。

核・商との同一視を固定する。古典的な説明は付録 D、高次群への一般化は付録 E。

展望：高次群の周期表

1-型の条件を外すと：

$$\infty\mathrm{Grp} := \sum_{(X, \mathrm{pt}) : \mathcal{U}_*} \mathrm{isConn}(X)$$

自己同型 2-群は、表の $n = 1, k = 1$ に現れる。

何回デループできるか： $\Omega^k Y$ (Y は基点付き $(k-1)$ -連結 $(n+k)$ -型)。表の n は台 $\Omega^k Y$ の切断レベルで、群は $n = 0, k = 1$ 。

中心を取ると表で一段下がる (BvDR)。最初の矢印は「群の中心は可換群」。一般の定義は補足。 n を固定すると、 $k \geq n+2$ では、さらにデループしても構造は本質的に増えない。

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$k = 1$	群 ↓ $\mathbb{Z}$	2-群 ↓ $\mathbb{Z}$	3-群
$k = 2$	可換群	組みひも 2-群	組みひも 3-群
$k = 3$	可換群	対称 2-群	syllleptic 3-群
$k = 4$	可換群	対称 2-群	対称 3-群

Baez–Dolan の周期表の左上。色は安定領域

($k \geq n+2$)、青い矢印は中心

応用： E_n -代数の中心と Deligne 予想

周期表の「中心を取ると一段下がる」という現象は、代数の世界にも現れる。

E_n -代数： n 次元の小円盤の配置で、積とその整合性を表す代数。

E_1 は結合的な代数に対応する。ここでは体上の鎖複体で考える。

高次 Deligne 予想 (定理)

$$A : E_n\text{-代数} \implies Z_{E_n}(A) : E_{n+1}\text{-代数}.$$

$n = 1$: **Deligne 予想**。結合代数 A の導来中心は Hochschild コチェイン複体：

$$Z_{E_1}(A) \simeq C^\bullet(A, A), \quad H^0 C^\bullet(A, A) \cong Z(A).$$

この複体そのものが E_2 -代数になる。McClure–Smith らが証明した。

Lurie の中心の理論から、 $n = 1$ の解決と高次版を統一的に導ける。

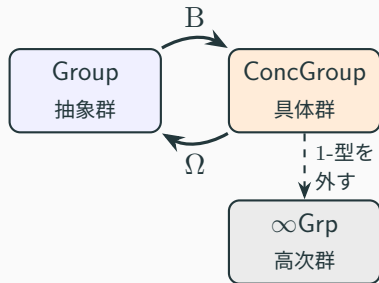
n は周期表の k に対応。参考：McClure–Smith ; Lurie, *Higher Algebra*, 系 5.3.1.15。

まとめ

1. 群は**基点付き連結 1-型**として定義でき、従来の定義と**型として同値**（各対象を道の *torsor* として読む）。
2. 群論は型の構成に翻訳される：不動点 = 切断、作用歪群 = 全空間。
3. 中心は二重ループ $\Omega^2(\mathcal{U}, BG)$ ：可換性は Eckmann–Hilton から。

排中律も選択公理も使っていないので、任意の ∞ -トポスで成り立つ（補足）。

群を定義するのに、演算はいらない。
1-型という条件を外せば、**高次群**になる。



スライドを公開しています。

QR コードから閲覧・ダウンロードできます。

`alwe-logic.github.io/homepage/
talks/suugakuto-10/`



付録の案内

テーマ	内容
A 推論規則	型を作る・使う規則
B ホモトピー仮説とその後	原典・HoTT 成立の背景・近年の結果
C 主定理と群作用の補足	証明・構造同一性・対訳辞典
D 古典的 Schreier 理論	B・型族・分裂拡大
E 高次 Schreier 理論	高次化・コホモロジーの型・普遍拡大
F 高次群と構成性	中心・ ∞ -トポス・選択
G 参考文献	本編と付録の出典

群拡大の話を通して読むなら、D → E の順に。各項目から、その付録の扉へ移動できる。

付録 A 推論規則

A-1 判断と規則の読み方

型理論は次の 3 種類の判断を導く体系。 $\Gamma = (x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n)$ は文脈。

$$\Gamma \vdash A : \mathcal{U} \quad \Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash a \equiv a' : A$$

(左から： A は型、 a は A の項、 a と a' は定義により等しい)

各型の規則は 4 種類 (＋一意性)：

形成	型そのものを作る
導入	その型の項を作る (構成子)
除去	その型の項を使う (帰納法・関数適用)
計算 (β)	導入してすぐ除去すると元に戻る
一意性 (η)	項は除去と導入で作り直せる

注意

定義による等しさ $\equiv$ は判断で、等式型 $a = b$ は型。本編の「等しさ = 道」は後者。

A-2 Π 型 (依存関数型)

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U} \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}}{\Gamma \vdash \prod_{x:A} B : \mathcal{U}} \text{ 形成}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash \lambda x. b : \prod_{x:A} B} \text{ 導入}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : \prod_{x:A} B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B[a/x]} \text{ 除去}$$

$$(\lambda x. b)(a) \equiv b[a/x] \quad (\beta), \quad f \equiv \lambda x. f(x) \quad (\eta)$$

B が x によらなければ $\prod_{x:A} B$ は関数型 $A \rightarrow B$ 。

A-3 Σ 型 (依存和型)

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U} \quad \Gamma, x : A \vdash B : \mathcal{U}}{\Gamma \vdash \sum_{x:A} B : \mathcal{U}} \text{ 形成}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B[a/x]}{\Gamma \vdash (a, b) : \sum_{x:A} B} \text{ 導入}$$

$$\frac{\Gamma, z : \sum_{x:A} B \vdash C : \mathcal{U} \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash c : C[(x, y)/z] \quad \Gamma \vdash s : \sum_{x:A} B}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\Sigma}(c, s) : C[s/z]} \text{ 除去}$$

$$\text{ind}_{\Sigma}(c, (a, b)) \equiv c[a/x, b/y] \quad (\beta)$$

除去規則は「組 (x, y) の場合に示せば十分」という帰納法。射影 pr_1, pr_2 はここから作れる。

A-4 等式型

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : A}{\Gamma \vdash a =_A b : \mathcal{U}} \text{ 形成}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \text{refl}_a : a =_A a} \text{ 導入}$$

$$\frac{\Gamma, y : A, p : a = y \vdash C : \mathcal{U} \quad \Gamma \vdash d : C[a/y, \text{refl}_a/p] \quad \Gamma \vdash q : a = b}{\Gamma \vdash J(d, q) : C[b/y, q/p]} \text{ 除去 (J)}$$

$$J(d, \text{refl}_a) \equiv d \quad (\beta)$$

- 本編の「道帰納法」はこの除去規則（基点付きの形）。
- 「 $p : a = a$ ならいつでも $p = \text{refl}_a$ 」（公理 K）はこの規則からは導けない。
Hofmann–Streicher の亜群モデルがその証拠。

A-5 道帰納法で演算を作る

$x : A$ を固定し、構成したい項の型 $C(y, p)$ と「 $p \equiv \text{refl}_x$ のときの値」 d を与えると、 λ がすべての $p : x = y$ に延ばす。

作るもの	構成したい項の型 $C(y, p)$	$p \equiv \text{refl}_x$ での値 d
逆 $p^{-1} : y = x$	$y = x$	refl_x
合成 $p \cdot q : x = z$	$\prod_{z:A} (y = z) \rightarrow (x = z)$	$\lambda z. \lambda q. q$
適用 $\text{ap}_f(p) : f(x) = f(y)$	$f(x) = f(y)$	$\text{refl}_{f(x)}$
輸送 $\text{tr}^B(p) : B(x) \rightarrow B(y)$	$B(x) \rightarrow B(y)$	$\text{id}_{B(x)}$

計算規則 (β) より、定義による等しさ $\text{refl}^{-1} \equiv \text{refl}$ 、 $\text{refl} \cdot q \equiv q$ 、 $\text{ap}_f(\text{refl}) \equiv \text{refl}$ 、 $\text{tr}(\text{refl}) \equiv \text{id}$ 。

亜群の公理も道帰納法で

例： $p \cdot p^{-1} = \text{refl}_x$ 。構成したい項の型は $C(y, p) :\equiv (p \cdot p^{-1} = \text{refl}_x)$ 。 $p \equiv \text{refl}_x$ なら $\text{refl} \cdot \text{refl}^{-1} \equiv \text{refl}$ なので、値は $\text{refl}_{\text{refl}_x}$ 。

右単位律 $p \cdot \text{refl} = p$ 、結合律、 $p^{-1} \cdot p = \text{refl}$ も同様（左単位律は定義から $\equiv$ ）。

A-6 宇宙と一価性

宇宙の階層： $\mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_1 : \mathcal{U}_2 : \dots$ ($\mathcal{U} : \mathcal{U}$ は矛盾する)

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_{i+1}} \text{ 累積}$$

各 $\mathcal{U}_i$ は Π 、 Σ 、等式型などで閉じている。本編では添字を省略。

一価性は規則ではなく **公理** (項を一つ仮定する)：

$$\text{univalence} : \prod_{A, B : \mathcal{U}} \text{isEquiv}(\text{idtoeqv}_{A, B}),$$

$$\text{idtoeqv}_{A, B} : (A = B) \rightarrow (A \simeq B).$$

idtoeqv は $\mathbf{J}$ で定義する ($\text{refl}_A \mapsto \text{id}_A$)。

本編の $\text{ua} : (A \simeq B) \rightarrow (A = B)$ は、この同値の**逆射**。

- 関数外延性 ($\prod_x f(x) = g(x) \rightarrow f = g$) は一価性から導ける。
- cubical type theory では一価性が**定理**になり、計算できるようになる。

A-7 高次帰納型：命題切り詰めと円周

命題切り詰め $\|A\|$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash |a| : \|A\|} \text{ 導入}$$

$$\frac{\Gamma \vdash x : \|A\| \quad \Gamma \vdash y : \|A\|}{\Gamma \vdash \text{sq}(x, y) : x = y} \text{ 道}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P : \mathcal{U} \quad \Gamma \vdash h : \text{isProp}(P) \quad \Gamma \vdash f : A \rightarrow P}{\Gamma \vdash \text{rec}(h, f) : \|A\| \rightarrow P} \text{ 除去}$$

計算規則： $\text{rec}(h, f)(|a|) \equiv f(a)$ 。

円周 S^1 ：対象 $\text{base} : S^1$ と道 $\text{loop} : \text{base} = \text{base}$ が構成子。

$$\frac{\Gamma, x : S^1 \vdash C : \mathcal{U} \quad \Gamma \vdash c : C[\text{base}/x] \quad \Gamma \vdash \ell : \text{tr}^C(\text{loop})(c) = c}{\Gamma \vdash \text{ind}_{S^1}(c, \ell) : \prod_{x:S^1} C} \text{ 除去}$$

計算規則： $\text{ind}_{S^1}(c, \ell)(\text{base}) \equiv c$ 、 loop に沿った作用は ℓ に等しい（こちらは道としての等しさ）。

付録 B ホモトピー仮説とその後

B-1 Grothendieck は何を考えていたか

Pursuing Stacks (1983) は、Quillen 宛の手紙から始まる。そこで問題になるのは、道の合成が満たす法則をどう記述するか。

Grothendieck 自身の言葉

"These arrows should be viewed, I believe, as being part of the data"

「これらの射も、データの一部として扱うべきだと思う。」(私訳)

「これらの射」とは、法則を等式で課す代わりに与える **高次のホモトピー**。

1. 道を合成する。
2. 結合律などを、その合成どうしを結ぶ 2-射として与える。
3. 五角形などの整合性も、さらに高い射として与える。以下、続く。

法則を証明する道も、その道どうしの関係も、構造に含めたい。

出典：A. Grothendieck, *Pursuing Stacks*, §2, 本文 p. 4。引用はその一節。冒頭の手紙は 1983 年 2 月 19 日付。

B-2 ホモトピー仮説は何を対応させるか

ホモトピー仮説

弱い ∞ -亜群の理論と、空間のホモトピー論は一致する。

正確には、適切な弱同値を反転して得られる理論の同値を求める。

空間 X の基本 ∞ -亜群 $\Pi_\infty(X)$:

対象 = 点

1-射 = 道

2-射 = 道のホモトピー

3-射 = その間のホモトピー ...

2-射以降は可逆になっている。

次元	代数的な姿	空間の姿
0	集合	0-型
1	亜群	1-型
2	弱い 2-亜群	2-型
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
∞	弱い ∞ -亜群	ホモトピー型

今日の主定理は、この対応の 1 次元の姿

群 $\longleftrightarrow$ 基点付き連結 1-型。古典的には、群 G に分類空間 $K(G, 1)$ を対応させる。

この共通の対象をアニマ (anima) とも呼ぶ (Česnavičius–Scholze、命名は Clausen)。「空間」はホモトピー型。

B-3 Voevodsky：探究を支える道具がほしい

1984 年、学生だった Voevodsky は Grothendieck の *Esquisse d'un Programme* を読むためにフランス語を学んだ。高次元の数学への関心は、そこから始まる。

2014 年の回想から

"I didn't have the tools to explore the areas where curiosity was leading me"

「好奇心に導かれる領域を探究するための道具を、私は持っていなかった。」（一節・私訳）

- 1999–2000 年、Deligne による検証を通じて、自身の論文の補題に誤りが発覚。それまで何年も見過ごされていた。
- さらに複雑な高次の構造を研究するとき、議論の正しさをどう確かめるか。

抽象的な数学を探究しながら、構成と証明を計算機で検証できる基礎へ。

出典：V. Voevodsky, *The Origins and Motivations of Univalent Foundations* (2014)。上記の動機は本人の回想による。

B-4 Grothendieck の発想を、数学の基礎へ

Voevodsky は、数学の概念をホモトピー型で表すことを、Grothendieck の発想の「逆転」と説明する。以下は、この発表の言葉での整理。

ホモトピー仮説からの視点

空間のホモトピー型を、高次の可逆な射で記述する。

Univalent Foundations への視点

ホモトピー型を基礎的な対象にして、その中に数学的構造と同一視を表す。一価性により、同値に沿って構成や証明を移せる。

2010 年の計画書では、人に理解でき、計算機で検証できる基礎を目指し、Coq で数学を展開している。日々の研究で使える基礎が目標。

2012–13 年：Awodey・Coquand・Voevodsky が組織した IAS 特別プログラムに型理論とホモトピー論の研究者が集まる。共同執筆の *HoTT Book* (2013) は、その成果の一つ。

Voevodsky (2014), 同上 ; *Univalent Foundations Project* (2010), pp. 1–2 ; Awodey–Coquand (2013)。書誌情報は G-3。

B-5 集合の次の次元は、亜群

Voevodsky は、集合を一段高次元にしたものを亜群と捉えたことを、発想の転機として振り返る。本編の BG で、この見方を具体化しよう。

同型類を集める

G -torsor はどれも互いに同型。
同型類の集合は一点になる。

$$\|BG\|_0 \simeq \mathbf{1}.$$

$\|-\|_0$ は集合への切り詰め。

同一視の仕方も残す

BG の道は、torsor の同変全単射。
基点 G の自己同一視には、群が残る。

$$\Omega(BG) \simeq G.$$

本編で証明した主定理の一方。

同型類が一つでも、同一視の仕方が一つとは限らない。

対象を分類するとき、同一視の仕方まで数学の対象にする。

歴史的な発言の出典：V. Voevodsky, *The Origins and Motivations of Univalent Foundations* (2014)。 BG による説明は本発表の整理。

B-6 等式型が、高次の整合性を作る

型 A から、等式型を繰り返して作る：

$x, y : A$	対象
$p, q : x = y$	1-射
$\alpha, \beta : p = q$	2-射
$\gamma : \alpha = \beta$	3-射 ...

型は弱い ∞ -亜群をなす

道帰納法から、合成・逆・単位だけでなく、結合律や高次の整合性も得られる。この主張は弱い高次亜群の定義を用いて定理になっている。

結合律を表す $a_{p,q,r} : (p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$ 自身も型の項。その整合性を表す等式型を、さらに考えられる。

本編では、この構造を 1-型に制限して、普通の群を取り出した。

Lumsdaine (2009), *Weak ω -categories from intensional type theory*; van den Berg–Garner (2011), *Types are weak ω -groupoids*. 一価性を仮定する前の等式型の理論で得られる。

B-7 どのモデルで、どこまで分かったか

「 ∞ -垂群」の具体的な定義を指定すると、比較定理の中身が決まる。

Kan 複体：古典的な基準

単体的なモデルでは、幾何学的実現と特異複体が空間との比較を与える。これは Kan–Quillen 理論による。

Grothendieck 型の 3-垂群 (2019)

合成と整合性を代数的に与える 3-垂群について、ホモトピー 3-型との対応を証明。

図式的な ∞ -垂群 (2024)

diagrammatic sets による弱い高次圏で、正の次元の射をすべて可逆にすると、空間のホモトピー論を得る (Kan 複体のモデルと Quillen 同値)。

別々の定義から、同じホモトピー論を取り出せることが核心。

Henry–Lanari, arXiv:1905.05625; Chanavat–Hadzihasanovic, arXiv:2410.19053v2。後者の図式的モデルと Grothendieck の globular モデルは異なる。

B-8 2026 年のプレプリントから

coherator：合成と、その高次の整合性を自由に付け加えるための代数的な理論。

Taylor：構成の一般化（7 月）

coherator の構成を整理し、モノイダル・対称モノイダルな ∞ -亜群などにも展開。ホモトピー仮説との比較は、一般化された pushout 予想を仮定して導く。

OpenAI：Grothendieck 型の仮説の証明を提示（9 月）

証明の鍵は、セルを付け加える操作（*elementary expansion*）でホモトピー型が変わらないこと。この性質から、弱い ∞ -亜群と空間が同じホモトピー論を表すことを導く。

付属資料が述べる Lean 形式化の対象は expansion の定理。空間との比較までの全体は含まれない。

expansion の定理は、Ara-Henry の定義に従う coherator と、境界に沿ってセルを貼り合わせたモデル（boundary-cellular model）についての主張。

2026 年 10 月 10 日時点。Taylor, arXiv:2607.28540; OpenAI のプレプリント; 形式化の範囲。書誌情報は G-4。

付録 C 主定理と群作用の補足

C-1 道帰納法と可縮性

$x : A$ を固定したとき、 x から出る道のなすアニマは可縮：

$$\sum_{y:A} (x = y) \simeq \mathbf{1}, \quad \text{中心は } (x, \text{refl}_x)$$

- 道帰納法から：任意の (y, p) について $(x, \text{refl}_x) = (y, p)$ を示すには、 $p \equiv \text{refl}_x$ の場合を示せば十分。
- 逆に、この可縮性と輸送から道帰納法が導ける。

端点 y を固定しない限り、どの道も refl に縮む。両端を固定した $p : x = x$ は縮むとは限らない (S^1 の loop)。

C-2 ループで同値なら同値

$f : (X, x_0) \rightarrow_* (Y, y_0)$ 、 X, Y は連結、 Ωf は同値とし、各 $\text{fib}_f(y)$ の可縮性を示す。

1. **すべての $\text{ap}_f : (x = x') \rightarrow (fx = fx')$ が同値**：命題なので、連結性と道帰納法で $x \equiv x' \equiv x_0$ に帰着。そこでは $\Omega f(p) = f_0^{-1} \cdot \text{ap}_f(p) \cdot f_0$ ($f_0 : f(x_0) = y_0$) なので ap_f も同値。
2. **ファイバーは命題**： $(x, \alpha), (x', \alpha') : \text{fib}_f(y)$ について、 Σ 型の等しさと $\text{tr}(q)(\alpha) = \text{ap}_f(q)^{-1} \cdot \alpha$ から

$$\begin{aligned} ((x, \alpha) = (x', \alpha')) &\simeq \sum_{q: x=x'} (\text{ap}_f(q) = \alpha \cdot \alpha'^{-1}) \\ &\equiv \text{fib}_{\text{ap}_f}(\alpha \cdot \alpha'^{-1}). \end{aligned}$$

ap_f は同値なので、これは可縮。

3. **ファイバーは対象を持つ**：2により目標は命題。 Y の連結性から $\beta : y_0 = y$ を取り出して $(x_0, f_0 \cdot \beta)$ 。対象を持つ命題なので可縮。 □

C-3 等式型の基本定理

定理（等式型の基本定理）

$a : A$ 、型族 $B : A \rightarrow \mathcal{U}$ 、 $b : B(a)$ とし、道帰納法で $f_x : (a = x) \rightarrow B(x)$ 、 $f_a(\text{refl}_a) := b$ と定める。次は同値： (1) $\sum_{x:A} B(x)$ は可縮。 (2) 各 $x : A$ で f_x は同値。

補題（ファイバーごとの同値） 型族の射 $f_x : P(x) \rightarrow Q(x)$ と全空間の射 $\text{tot}(f)(x, u) := (x, f_x(u))$ について、 $\text{fib}_{\text{tot}(f)}((x, v)) \simeq \text{fib}_{f_x}(v)$ 。よって $\text{tot}(f)$ が同値 $\Leftrightarrow$ 各 f_x が同値（同値 = 各ファイバーが可縮）。

補題の証明： Σ 型の等しさで左辺 $\simeq \sum_{x'} \sum_{u:P(x')} \sum_{p:x'=x} (\text{tr}^Q(p)(f_{x'}(u)) = v)$ 。 $\sum_{x'} (x' = x)$ は可縮なので (x', p) を (x, refl) に縮めると $\sum_{u:P(x)} (f_x(u) = v) \equiv \text{fib}_{f_x}(v)$ 。

定理の証明 $P(x) := (a = x)$ 、 $Q := B$ に補題を使う。 $\sum_x (a = x)$ は可縮（道帰納法と可縮性の補足）。可縮な型の間の射は同値で、同値の行き先も可縮。よって (1) $\Leftrightarrow \text{tot}(f)$ が同値 $\Leftrightarrow$ (2)。□

例：一価性 $\Leftrightarrow \sum_{X:\mathcal{U}} (A \simeq X)$ が可縮 ($f = \text{idtoeqv}$)。主定理の補題の証明の「各 ap_f が同値 $\Rightarrow$ ファイバーは命題」も補題から言える ($P(x') := (x' = x)$ 、 $Q(x') := (fx' = fx)$)。

C-4 構造同一性原理

設定：台の型 A と構造の族 $S : A \rightarrow \mathcal{U}$ 。構造付きの対象 $(a, s) : \sum_{x:A} S(x)$ を固定する。

- 台の同一視 $E : A \rightarrow \mathcal{U}$ 、 $e_0 : E(a)$ で、 $\sum_x E(x)$ が可縮（例： $E(X) :\equiv (A \simeq X)$ 、一価性）。
- 「 e が構造 s を t に移す」 $D(x, t, e) : \mathcal{U}$ 、 $d_0 : D(a, s, e_0)$ で、 $\sum_{t:S(a)} D(a, t, e_0)$ が可縮。

定理（構造同一性原理）

$$((a, s) = (x, t)) \simeq \sum_{e:E(x)} D(x, t, e)$$

証明 等式型の基本定理により、全空間 $\sum_{(x,t)} \sum_{e:E(x)} D(x, t, e)$ の可縮性を示せばよい。並べ替えると $\sum_{(x,e): \sum_x E(x)} \sum_{t:S(x)} D(x, t, e)$ 。 $\sum_x E(x)$ を中心 (a, e_0) に縮めると $\sum_{t:S(a)} D(a, t, e_0)$ になり、これは仮定より可縮。 □

C-5 構造同一性原理の例 (G -集合と群)

G -集合: $A \equiv \text{Set}$ 、 $S(X) \equiv \sum_{\alpha: G \rightarrow X \rightarrow X} \text{Ax}(\alpha)$ (Ax は単位律・結合律、命題)。

- $E(Y) \equiv (X \simeq Y)$ 、 $e_0 \equiv \text{id}$ 。 $\sum_Y (X \simeq Y)$ は一価性で可縮 (Set は $\mathcal{U}$ の部分型)。
- $D(Y, \beta, e) \equiv \prod_{g, x} e(\alpha(g, x)) = \beta(g, e(x))$ 。
- $\sum_{(\beta, h): S(X)} \prod_{g, x} \alpha(g, x) = \beta(g, x)$ は、関数外延性で $\sum_{\beta} (\alpha = \beta) \times \text{Ax}(\beta)$ 。 $\sum_{\beta} (\alpha = \beta)$ を (α, refl) に縮めると $\text{Ax}(\alpha)$ 、これは対象を持つ命題なので可縮。

結論

$$((X, \alpha) =_{G\text{-Set}} (Y, \beta)) \simeq \sum_{e: X \simeq Y} \prod_{g, x} e(g \cdot x) = g \cdot e(x)$$

群: 同じ議論で $(G =_{\text{Group}} H) \simeq (G \cong H)$ 。 D には積の保存だけ書けばよい。恒等写像の上では積は一致し、単位元と逆元は積から一意に決まるので、 $\sum_t D(G, t, \text{id})$ は可縮。

関数外延性は一価性から従う (HoTT Book 4.9 節)。

C-6 抽象群の定義

「集合 G と演算 e, m, i の組で、公理を満たすもの」を、そのまま Σ 型で書く。

定義 (抽象群)

$$\text{Group} \equiv \sum_{G:\mathcal{U}} \text{isSet}(G) \times \sum_{e:G} \sum_{m:G \rightarrow G \rightarrow G} \sum_{i:G \rightarrow G} \text{Ax}(G, e, m, i)$$

$$\text{Ax}(G, e, m, i) \equiv \left(\prod_{x,y,z:G} m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z)) \right) \quad \text{結合律}$$

$$\times \left(\prod_{x:G} m(e, x) = x \right) \times \left(\prod_{x:G} m(x, e) = x \right) \quad \text{単位律}$$

$$\times \left(\prod_{x:G} m(i(x), x) = e \right) \times \left(\prod_{x:G} m(x, i(x)) = e \right) \quad \text{逆元律}$$

- 公理を満たす「証拠」も組の成分として持つ。
- 群 (G, e, m, i) を一つ与えることは、Group の対象を一つ与えること。

$G : \mathcal{U}$ を動かすので、Group は一つ上の宇宙に入る。

C-7 台が集合であることと群同型

公理は命題

G が集合なので、 Ax の各成分は**命題**（集合の等しさは (-1) -冪群）。

公理を満たすことは「性質」で、証拠の選び方は問題にならない。

集合でなければ、公理の証拠そのものが複数ありえ、その間の整合も要る（ループ空間で見た問題）。

群同型：

$$(G \cong H) := \sum_{\varphi: G \simeq H} \prod_{x, y: G} \varphi(m(x, y)) = m(\varphi(x), \varphi(y))$$

単位元と逆元の保存は自動的に従う。

- 構造同一性原理： $(G =_{\text{Group}} H) \simeq (G \cong H)$
- とくに $\Omega(\text{Group}, G) \simeq \text{Aut}(G)$ ：群の型の中で G のまわりを回ると、 G の自己同型が出てくる。

C-8 $\Omega(BG) \simeq G$ の順序の照合

約束：道の合成 $p \cdot q$ は「 p の次に q 」、 G -集合は左作用。

順序に注意

$f \mapsto f(e)$ は合成の順序を反転する： $(f \circ f')(e) = f'(e) f(e)$ 。

道の合成と同値の合成の対応も反転する：輸送で $p \cdot q \mapsto \text{tr}(q) \circ \text{tr}(p)$ 。

二つの反転が打ち消し合って、 $\Omega(BG) \cong G$ は群同型になる。

- $\text{tr}(p \cdot q) = \text{tr}(q) \circ \text{tr}(p)$ (道帰納法)。
- $\varphi(f) := f(e)$ とおくと $\varphi(f \circ f') = f'(e) f(e) = \varphi(f') \varphi(f)$ 。
- よって $p \mapsto \varphi(\text{tr}(p))$ は $\varphi(\text{tr}(p \cdot q)) = \varphi(\text{tr}(p)) \varphi(\text{tr}(q))$ をみたす。

Symmetry 本のように合成を関数の順で書くと、見た目が逆になる。

C-9 BG と宇宙の大きさ

G の台が $\mathcal{U}_i$ に入るとする。二つの段階を分ける：

1. **torsor の型を作る：**

$$T_G := \sum_{X: G\text{-Set}_{\mathcal{U}_i}} \|X = G\| : \mathcal{U}_{i+1}.$$

一価性と命題切り詰めで構成でき、 $\Omega T_G \cong G$ 。

2. **同じ宇宙の分類型を得る：** Rijke の join 構成による小ささの定理を使い、 $BG : \mathcal{U}_i$ と基点付き同値 $BG \simeq_* T_G$ を得る。

この段階では、宇宙がグラフ商などの**必要な高次帰納型**で閉じていることも仮定する。

本編の約束

小さい分類型と torsor の型をこの同値で同一視し、どちらも BG と書く。これにより $\text{Group}_{\mathcal{U}_i} \simeq \text{ConcGroup}_{\mathcal{U}_i}$ を得る。

参考：Rijke, *The join construction*, §4。

$X : BG \rightarrow \text{Set}$ を G -集合とする。

古典的な群論	型の言葉
G -集合 X	型族 $X : BG \rightarrow \text{Set}$
左正則作用 (G 自身)	$z \mapsto (z = \text{pt})$
不動点集合 X^G	切断 $\prod_{z:BG} X(z)$
軌道集合 X/G	全空間の成分 $\ \sum_{z:BG} X(z)\ _0$
推移的な作用	$\sum_{z:BG} X(z)$ が連結
x の安定化群	$\Omega(\sum_{z:BG} X(z), (\text{pt}, x))$

全空間 $\sum_z X(z)$ はホモトピー商 $X//G$ 。亜群の言葉では作用亜群 (対象 X 、射 $g : x \rightarrow g \cdot x$)。

古典的な群論	型の言葉
部分群 $H \leq G$	基点付き射 $BH \rightarrow_* BG$ で、ファイバーが集合
剰余集合 G/H	その射のファイバー
準同型 φ の核	$B\varphi$ のファイバーのループ空間
半直積 $N \rtimes G$	具体群の族 $BG \rightarrow \text{ConcGroup}$ の全空間
中心 $Z(G)$	$\Omega(BG \rightarrow BG, \text{id})$

- 群準同型 $H \rightarrow G$ が単射 $\Leftrightarrow BH \rightarrow BG$ のファイバーが集合。
型の射そのものの埋め込み条件「ファイバーが命題」とは区別する。
- 半直積： G の N への作用 $= BG \rightarrow_* (\text{ConcGroup}, BN)$ 。 $\Omega(\text{ConcGroup}, BN) \simeq \text{Aut}(N)$ による。
- 中心：恒等射の自己ホモトピー。亜群の言葉では、恒等関手の自然同型。

付録 D 古典的 Schreier 理論

D-1 群拡大の分類問題

群 N, Q を固定する。 Q の N による拡大とは短完全列

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Q \longrightarrow 1.$$

i は単射、 p は全射、 $\operatorname{im} i = \ker p$ 。つまり $N \triangleleft E$ かつ $E/N \cong Q$ で、その同一視も指定する。

拡大の同値

$(E, i, p) \sim (E', i', p')$ とは、群同型 $f : E \rightarrow E'$ で

$$f \circ i = i', \quad p' \circ f = p$$

を満たすものがあること。核 N と商 Q は固定する。

例：核と商がともに $\mathbb{Z}/2$ の場合

$$E = \mathbb{Z}/4 \quad \text{と} \quad E = (\mathbb{Z}/2)^2$$

は異なる拡大。この違いを記録するデータは何か？

普通の群の拡大を、分類型と型族で記述する。高次 Schreier 理論にも、同じ構成で進める。

D-2 群拡大に B を取ると

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Q \longrightarrow 1 \quad \rightsquigarrow \quad BN \xrightarrow{Bi} BE \xrightarrow{Bp} BQ.$$

短完全列は、分類型のファイバー列になる

$$BN \simeq_* \text{fib}_{Bp}(\text{pt}_Q),$$
$$\text{fib}_{Bp}(z) := \sum_{x:BE} (Bp(x) = z).$$

$$\begin{array}{ccc} BN & \xrightarrow{Bi} & BE \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow Bp \\ 1 & \xrightarrow{\text{pt}_Q} & BQ \end{array}$$

右の四角が引き戻しになる、という意味。 Bi は、そのファイバーを全空間に入れる射。

なぜ BN か？ ファイバーは 1-型で、 p の全射性から連結。そのループ群は $\Omega \text{fib}_{Bp}(\text{pt}_Q) \simeq \sum_{g:E} (p(g) = 1) \cong N$ 。

p の全射性に対応するのは、 Bp のファイバーの連結性。

Myers–Yasser, 定理 5.6 (古典的な短完全列との一致)。

D-3 拡大は BQ 上の型族である

$F(z) := \text{fib}_{Bp}(z)$ と置く。拡大から得られるデータは $F : BQ \rightarrow \mathcal{U}_i$ と $e : F(\text{pt}_Q) \simeq BN$ 。連結性により、各 $F(z)$ は単に BN と同値。 $u_0 := e^{-1}(\text{pt}_N)$ と置く。

逆に、依存和から拡大を復元する

$$BE_F := \sum_{z:BQ} F(z), \quad \text{pt}_{E_F} := (\text{pt}_Q, u_0), \quad p_F(z, u) := z.$$

底と各ファイバーが連結 1-型なので、全空間も連結 1-型。 $E_F := \Omega(BE_F, \text{pt}_{E_F})$ が普通の群になる。

Σ 型の等しさから、群の元まで具体的に読める：

$$E_F \simeq \sum_{q:\Omega BQ} (\text{tr}^F(q)(u_0) = u_0).$$

E の元とは、 Q のループと、その上で閉じる持ち上げの組。核は $q = \text{refl}$ の部分で、 $\Omega(F(\text{pt}_Q), u_0) \cong N$ 。 F の連結性から $\Omega p_F : E_F \rightarrow Q$ は全射になる。型族と射の対応は Myers–Yasser, 補題 4.5。

D-4 輸送は N ではなく BN に作用する

$F : BQ \rightarrow \mathcal{U}_i$ 、 $e : F(\text{pt}_Q) \simeq BN$ とする。本編の左作用の約束に合わせ、 $q : Q \cong \Omega BQ$ に対し

$$T_q := e \circ \text{tr}^F(q^{-1}) \circ e^{-1} : BN \simeq BN$$

と置く。輸送の性質が同一視

$$T_1 = \text{id}, \quad T_q \circ T_r = T_{qr}$$

と、その整合性を与える。

基点を保つとは限らない

T_q は、**基点を忘れた** BN の自己同値。

基点へ戻す道まで選ぶと N の自己同型が得られるが、戻し方を変えると共役の分だけ変わる。

したがって自然に現れるのは、自己同型**群**だけでなく

$$\text{Aut}(BN) := (BN \simeq BN) \simeq \text{Aut}_2(N).$$

BN は 1-型なので自己同値の型は 1-型。自己同値の間の同一視も、作用のデータとして残る。

D-5 分裂拡大は、型族に切断がある場合

本編の「準同型 = 基点付き射」により、次のデータは対応する：

$$\begin{array}{c} s : Q \rightarrow E \text{ は群準同型, } p \circ s = \text{id}_Q \\ \updownarrow \\ \sigma : \text{B}Q \rightarrow_* \text{B}E, \quad \text{B}p \circ \sigma = \text{id}_{\text{B}Q} \quad (\text{基点付きで}). \end{array}$$

$\text{B}E \simeq \sum_z F(z)$ と書けば、後者は**基点付き切断**

$$\sum_{u: \prod_{z: \text{B}Q} F(z)} (u(\text{pt}_Q) = u_0)$$

の項。各ファイバーに、輸送と整合する基点を選んでいる。

切断から半直積へ

$\varphi_q(n) := s(q)ns(q)^{-1}$ は群への作用となり、

$$E \cong N \rtimes_{\varphi} Q, \quad (n, q)(m, r) = (n\varphi_q(m), qr).$$

群準同型でない集合の切断 $Q \rightarrow E$ からは、 $\text{B}Q$ 上の切断は得られない。Myers–Yasser, §6。

D-6 古典的 Schreier 理論を、一価性で書く

宇宙の中の BN の連結成分を $C_N := \sum_{X:\mathcal{U}_i} \|X \simeq BN\|$ 、 $c_N := (BN, |\mathrm{id}|)$ と置く。一価性より $\Omega(C_N, c_N) \simeq \mathrm{Aut}(BN)$ 。つまり $C_N = \mathrm{B Aut}(BN)$ は自己同型 2-群の**分類型**。

普通の群 N, Q の拡大の型

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}(Q, N) &\simeq \sum_{F:\mathrm{B}Q \rightarrow \mathcal{U}_i} (F(\mathrm{pt}_Q) \simeq BN) \\ &\simeq ((\mathrm{B}Q, \mathrm{pt}_Q) \rightarrow_* (C_N, c_N)). \end{aligned}$$

$\mathrm{Ext}(Q, N)$ は D-1 の拡大の型。核・商との同一視も含める。同値類の集合は $\|\mathrm{Ext}(Q, N)\|_0$ 。

分類射は基点付き、ファイバーの自己同値は基点なし。

前者は核の同一視を固定し、後者は分裂しない拡大も許す。

C_N は連結 2-型で $\mathcal{U}_{i+1}$ に属する。分類射は $\chi(z) := (F(z), w_z)$ 。 $w_z : \|F(z) \simeq BN\|$ は $\mathrm{B}Q$ の連結性から得る。

D-7 同じファイバーでも、全空間は違う

$N = Q = \mathbb{Z}/2$ の二つの拡大に B を取ると

$$B(\mathbb{Z}/2) \longrightarrow B(\mathbb{Z}/4) \longrightarrow B(\mathbb{Z}/2),$$

$$B(\mathbb{Z}/2) \longrightarrow B((\mathbb{Z}/2)^2) \longrightarrow B(\mathbb{Z}/2).$$

底とファイバーは同じでも、**底の上の型族として異なる**。商の生成元の持ち上げを $u \in E$ とすると、その違いは

E	u^2	拡大の分裂
$\mathbb{Z}/4$	核の非自明な元	しない
$(\mathbb{Z}/2)^2$	単位元	する

自己同型の間の同一視が、違いを記録する

$\text{Aut}_2(\mathbb{Z}/2)$ は対象が一つ、自己同一視が二つ。生成元 q に対する輸送を二度行ったときの同一視 $T_q \circ T_q = \text{id}$ に、この違いが残る。

付録 E 高次 Schreier 理論

E-1 高次 Schreier 理論

1-型の条件を外し、 BN, BQ を任意の基点付き連結型にする。D-6 の $C_N = B \operatorname{Aut}(BN)$ と、D-3 の再構成を使う。

拡大の型：核との同一視も含める

$\operatorname{Ext}(Q, N) := \sum_{E: \infty \operatorname{Grp} \mathcal{U}_i} \sum_{(p, \eta): BE \rightarrow_* BQ} (\operatorname{fib}_p(\operatorname{pt}_Q) \simeq_* BN)$ 、ここで $\eta: p(\operatorname{pt}_E) = \operatorname{pt}_Q$ 、ファイバーの基点は $(\operatorname{pt}_E, \eta)$ 。

高次 Schreier 定理 (Myers–Yasser, 定理 4.6)

$$\operatorname{Ext}(Q, N) \simeq \sum_{F: BQ \rightarrow \mathcal{U}_i} (F(\operatorname{pt}_Q) \simeq BN) \simeq ((BQ, \operatorname{pt}_Q) \rightarrow_* (C_N, c_N)).$$

型の同値なので、拡大の同一視とその高次の同一視まで対応する。同値類の集合は $\|\operatorname{Ext}(Q, N)\|_0$ 。代表元の一斉選択は用いない。

$BN, BQ: \mathcal{U}_i$ 、拡大の型は $\mathcal{U}_{i+1}$ 。Myers–Yasser (2025) は Cubical Agda で形式化。核は型族と全空間の対応 (補題 4.5)。

E-2 群コホモロジーを型で定義する

普通の群 Q と可換群 A を考える。Eilenberg–MacLane 型 $K(A, n) = B^n A$ は、 $n \geq 1$ で

$$(n-1)\text{-連結な } n\text{-型}, \quad \Omega^n K(A, n) \cong A$$

となる基点付き型。 $K(A, 0) := A$ 、 $K(A, 1) = BA$ 。

定義：自明な係数作用の群コホモロジー

$$H^n(Q; A) := \|BQ \rightarrow K(A, n)\|_0 \quad (n \geq 0).$$

BQ から $K(A, n)$ への射を、同一視の類にしたもの。加法は $K(A, n)$ の加法から誘導される。

$n = 2$ では、 $B^2 A$ が 1-連結なので

$$H^2(Q; A) \simeq \|BQ \rightarrow_* B^2 A\|_0.$$

この射のファイバーとして中心拡大を作る (E-3)。

古典的な空間のモデルでは、通常のコホモロジーと一致する。ここでは射の型による定義を使う。一般のモデルでは内部のコホモロジーを与える。

E-3 中心拡大は、 B^2A への射のファイバー

可換群 A による中心拡大の類は $H^2(Q; A) \cong \|BQ \rightarrow_* B^2A\|_0$ で表せる。代表 $\chi: BQ \rightarrow_* B^2A$ から

拡大の分類型を作る

$BE_\chi := \text{fib}_\chi(\text{pt}) = \sum_{z: BQ} (\chi(z) = \text{pt})$ 。基点条件を $\eta: \chi(\text{pt}_Q) = \text{pt}$ とすると、基点は (pt_Q, η) 。型族 $F_\chi(z) := (\chi(z) = \text{pt})$ の基点上のファイバーは $\Omega B^2A \simeq BA$ 。

$$BA \longrightarrow BE_\chi \longrightarrow BQ \xrightarrow{\chi} B^2A.$$

- χ が基点への定値射なら、 $BE_\chi \simeq BQ \times BA$ 。
- ループを取ると中心拡大 $1 \rightarrow A \rightarrow E_\chi \rightarrow Q \rightarrow 1$ を得る。

参考：Buchholtz–van Doorn–Rijke, §7.2。

E-4 作用のある係数は、型族の切断にする

Q -加群は、可換群 A と作用 $\varphi : Q \rightarrow \text{Aut}_{\text{Ab}}(A)$ の組。この作用を基点付き射 $B\varphi : BQ \rightarrow_* B \text{Aut}_{\text{Ab}}(A)$ で表す。 A の自己同型は $B^2 A$ の基点付き自己同値を誘導するので、**基点付き型族** $(K_\varphi, 0) : BQ \rightarrow \mathcal{U}_*$ が得られる。基点上のファイバーは $B^2 A$ 。

作用を固定した拡大の型

$$\text{Sec}_*(K_\varphi) := \sum_{s: \prod_{z: BQ} K_\varphi(z)} (s(\text{pt}_Q) = 0_{\text{pt}_Q}),$$

$$\text{Ext}_\varphi(Q, A) \simeq \text{Sec}_*(K_\varphi).$$

Ext_φ は、誘導する作用と φ との同一視も指定した拡大の型。

$$H^2(Q; A_\varphi) := \|\text{Sec}_*(K_\varphi)\|_0 \simeq \|\text{Ext}_\varphi(Q, A)\|_0.$$

これは作用つき係数の 2 次群コホモロジーの HoTT での定義。自明な作用では K_φ は定値族で、E-3 の基点付き関数型に戻る。

ここでの切断はコホモロジー類を表す。D-5 の拡大の切断とは別の型族。

E-5 普遍的な型族から、すべての拡大へ

一般の高次群 N, Q に戻る。 C_N 上の型族 $T_N(X, w) := X$ と全空間 $D_N := \sum_{(X, w): C_N} X$ 、 $d_N := (c_N, \text{pt}_N)$ を考える。分類射 $\chi: BQ \rightarrow_* C_N$ に沿って引き戻すと $F = T_N \circ \chi$ 、 $BE_F = \sum_{z: BQ} F(z)$ を得る。
一価性と Σ 型の等しさにより

$$\Omega(C_N, c_N) \simeq \text{Aut}(BN),$$

$$\Omega(D_N, d_N) \simeq \text{Aut}_*(BN).$$

ここで Aut_* は基点付き自己同値の型。

$$\begin{array}{ccc} BE_F & \longrightarrow & D_N \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ BQ & \xrightarrow{\chi} & C_N \end{array}$$

ループを取ると、普遍的な高次群の拡大

$$N \longrightarrow \text{Aut}_*(BN) \longrightarrow \text{Aut}(BN).$$

普通の群なら $N \xrightarrow{\text{Ad}} \text{Aut}_{\text{Grp}}(N) \rightarrow \text{Aut}_2(N)$ 。最後の項は 2-群。

すべての拡大は、分類射に沿うこの型族の引き戻しとして得られる。

付録 F 高次群と構成性

F-1 中心の分類型

中心 $Z(G) \simeq \Omega^2(\mathcal{U}, BG)$ のデループは、宇宙の中の BG の成分から作れる：

$$\begin{aligned} BZ(G) &\equiv (BG \rightarrow BG)_{(\text{id})} \simeq (BG = BG)_{(\text{refl})} \\ B^2Z(G) &\equiv \left(\sum_{X:\mathcal{U}} \|X = BG\| \right) \langle 1 \rangle \end{aligned}$$

$(-)_a$: a を含む連結成分、 $\langle 1 \rangle$: 1-連結被覆。

一般の k (BvDR) : k 回デループできるもの $\mathcal{G} = \Omega^k(B^k\mathcal{G})$ の中心は、 $B^k\mathcal{G}$ の (基点を忘れた) 自己同値の型を使って

$$Z(\mathcal{G}) \equiv \Omega^k \text{Aut}(B^k\mathcal{G})$$

と定義し、これが $(k+1)$ 回デループできる。 $k=1$ で $\Omega(BG \rightarrow BG, \text{id})$ に戻る。

F-2 どこでも成り立つ (∞ -トポス)

今日の証明は**排中律**も**選択公理**も使っていない。

∞ -トポスで解釈する

HoTT の定理は、任意の ∞ -トポスの中で解釈しても成り立つ。

任意の Grothendieck ∞ -トポスに、一価な宇宙をもつモデルがある (Shulman)。

空間 M 上の層の ∞ -トポスで読むと：

今日の言葉	層の ∞ -トポスで
型 (アニメ)	空間の層
群	群の層
BG (G -torsor 全体の型)	G -torsor の スタック
主定理	群の層 $\simeq$ 基点付き連結 1-切り詰め対象

「HoTT は ∞ -トポスの内部言語」は標語。型理論と ∞ -圏の正確な対応は、初等 ∞ -トポスを含め分かっていない部分が多い。

F-3 Nielsen–Schreier の一様版は偽

古典：自由群の部分群は自由。位相的証明： $BF_A \simeq \bigvee_A S^1$ （円周のウェッジ）の被覆はグラフで、全域木を**選んで**縮めると円周のウェッジになる。（ $\bigvee_A S^1$ が任意の集合 A で 1-型であることは Wörn が示した）

HoTT では（Swan）：

- 基底が**存在する**版：生成集合の等号が判定可能で有限指数なら構成的（Swan 定理 5.4）。一般には選択公理から従う。成り立たない Boole ∞ -トポスもある。
- 基底を**一様に選ぶ**版（切り詰めない版）：**偽**。

反例

$A = \{a, b\}$ を 2 元集合、 $\theta : F_A \rightarrow \mathbb{Z}/2$ ($a, b \mapsto 1$)、 $H := \ker \theta$ とする。 A を BS_2 の上で動かすと、一様な選び方は BS_2 上の切断になり、 $a \leftrightarrow b$ の入れ替えで不変でなければならない。しかし、そのような H の基底はない (F-4)。

第 4 部の「一様に一点は選べない」と同じ現象： **BS_2 上で切断が取れない**。

F-4 入れ替えで不変な基底はない

$H = \ker(F_{\{a,b\}} \rightarrow \mathbb{Z}/2)$ 、 $a, b \mapsto 1$ 。 a と b を交換する自己同型を σ とする。 $\sigma(H) = H$ 。

1. **H の基底は 3 元**： H は階数 2 の自由群の指数 2 の部分群なので、階数は $2(2-1)+1=3$ 。例えば $\{a^2, ab, ab^{-1}\}$ が基底。
2. **不変な基底には固定点が必要**：基底 C が $\sigma(C) = C$ を満たすなら、 σ は 3 元集合 C の置換で $\sigma^2 = \text{id}$ 。2 元の組にできない元が残り、ある $c \in C$ で $\sigma(c) = c$ 。
3. **固定される元は単位元だけ**：長さが 1 以上の既約語では、交換すると各文字が変わる。よって $\sigma(c) = c$ なら $c = e$ 。しかし自由基底に単位元は入らない。 $\square$

存在と一様な選択は違う

基底は存在するが、 a, b の交換に整合するようには選べない。

Swan, 定理 7.4・系 7.5。

付録 G 参考文献

G-1 参考文献：HoTT と群論

- The Univalent Foundations Program, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, 2013.
- M. Bezem, U. Buchholtz, P. Cagne, B. I. Dundas, D. R. Grayson, *Symmetry* (GitHub で公開) .
- U. Buchholtz, F. van Doorn, E. Rijke, Higher Groups in Homotopy Type Theory, LICS 2018.
- D. R. Licata, E. Finster, Eilenberg–MacLane Spaces in Homotopy Type Theory, CSL-LICS 2014.
- B. Ahrens, K. Kapulkin, M. Shulman, Univalent categories and the Rezk completion, MSCS 2015.
- E. Rijke, The join construction, arXiv:1701.07538.
- D. R. Licata, M. Shulman, Calculating the Fundamental Group of the Circle in Homotopy Type Theory, LICS 2013.
- M. Shulman, All $(\infty, 1)$ -toposes have strict univalent universes, arXiv:1904.07004.
- D. J. Myers, Z. Yasser, *Higher Schreier Theory in Cubical Agda*, The Journal of Symbolic Logic, 2025, §§4–6 (特に定理 4.6 • 5.6 • 6.5)。
- P. LeFanu Lumsdaine, Weak ω -categories from intensional type theory, TLCA 2009.
- B. van den Berg, R. Garner, Types are weak ω -groupoids, Proc. LMS 2011.

G-2 参考文献：高次群と応用

- N. Kraus, T. Altenkirch, Free Higher Groups in Homotopy Type Theory, LICS 2018.
- D. Wörn, Path spaces of pushouts, arXiv:2402.12339.
- A. W. Swan, On the Nielsen–Schreier theorem in homotopy type theory, LMCS 2022.
- J. Baez, A. Lauda, Higher-dimensional algebra V: 2-groups, TAC 2004.
- J. Baez, M. Shulman, Lectures on n -categories and cohomology, 2006.
- J. E. McClure, J. H. Smith, A solution of Deligne’s conjecture, arXiv:math/9910126, 1999.
- J. Lurie, *Higher Algebra*, 2017, §5.3 (特に系 5.3.1.15) .
- J. Baez, This Week’s Finds in Mathematical Physics (Week 223), 2005.
- 前川拓海, 「群の拡大の分類」, 2025 年 3 月 29 日。
<https://animaegawa.github.io/blog/ext>
- K. Česnavičius, P. Scholze, Purity for flat cohomology, Ann. of Math. 2024.
- 形式化：agda-unimath (concrete groups) .

G-3 参考文献：ホモトピー仮説と HoTT の成立

- A. Grothendieck, *Pursuing Stacks*, 1983 年の草稿。引用は §2, 本文 p. 4 (2021 年公開の組版版)。
- D. Quillen, *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Mathematics 43, 1967.
- V. Voevodsky, *Univalent Foundations Project* (a modified version of an NSF grant application), 2010 年 10 月 1 日, pp. 1–2.
- V. Voevodsky, *The Origins and Motivations of Univalent Foundations*, IAS Institute Letter, Summer 2014 (同年 3 月 26 日の講演に基づく回想)。
- S. Awodey, T. Coquand, *Univalent Foundations and the Large-Scale Formalization of Mathematics*, IAS Institute Letter, Summer 2013.

G-4 参考文献：ホモトピー仮説の近年の進展

- S. Henry, E. Lanari, *On the homotopy hypothesis in dimension 3*, arXiv:1905.05625, 2019.
- C. Chanavat, A. Hadzihanovic, *Model structures for diagrammatic (∞, n) -categories*, arXiv:2410.19053v2, 2024.
- J. Taylor, *Algebraic coherators, controlled theories, and Grothendieck realizations*, arXiv:2607.28540, 2026 (プレプリント)。
- OpenAI, *The Grothendieck homotopy hypothesis via elementary expansions*, 2026 年 9 月 24 日 (プレプリント)。付属の Lean 形式化の範囲も参照。

新しいプレプリントの記述は 2026 年 10 月 10 日時点の公開資料による。