

PA の可算超準モデルってマジやばくて！

いことんど

2026 年 10 月 06 日

1. アブストラクト

古典一階述語論理上の理論 (あるいは公理系) の中に, Peano Arithmetic (PA) と呼ばれるものがあります¹. この理論は, 数理論理学において次の 2 点から盛んに分析されています.

1. 不完全性定理の分析で便利.

- コード化に関して本質的な部分を切り出している.
- 「本質的に反映的 (essentially reflexive)」などの強力な性質を持つ.

2. 自然数に関する性質を (部分的にでも) 表現しているように見える.

本講演では 2 つ目の PA が表現する自然数に関する性質として, 特に「構造」に注目します. タイトルや, PA の重要性の 2 つ目の括弧書きから察しが付くかもしれませんが, 実は PA が自然数構造に関する性質を全て表現できているとは到底いえません. 実際, PA は自然数構造 $\mathbb{N}$ 以外のモデル (超準モデル) を持ちます. そして PA の可算超準モデルは, いくつかのヤバい性質を持つことが分かっています. そこで本講演では, そういったヤバさの一端として, 次のことを紹介します.

- Tennenbaum の定理
- Friedman の定理
- Friedman の定理の変化版

証明の詳細までは立ち入らず, 証明の概略と, 帰納法公理の働きなどの証明の鍵となる概念を紹介します.

2. 前提知識

古典一階述語論理の完全性定理の主張が理解できる程度の知識を仮定します (証明を知っている, 理解していることまでは不要です).

この前提知識が入門枠の制限に収まらないため一般枠での講演になりますが, PA や不完全性定理についてほとんど知らない方でも楽しめる講演にする予定です! 気軽に聴きに來てください~!

参考文献

[1] Richard Kaye, Models of Peano Arithmetic. Oxford University Press, 1991.

¹ 「ペアノの公理系」と呼ばれるものとは異なります. 例えば Wikipedia 『ペアノの公理』を参照してください.