

ディオファントス方程式の解の個数の数え上げ公式

N.Y

n 変数整数係数多項式 f を用いて

$$f(x_1, \dots, x_m) = 0$$

と書ける方程式をディオファントス方程式とよばれる。与えられたディオファントス方程式に対してその整数解の有無を判定する問題 Hilbert の第 10 問題として知られ、その否定的解決が 1970 年 Matijasevic により示された。つまりディオファントス方程式に整数化があるかを機械的に判定するアルゴリズムは存在しない。

今回の講演では、ディオファントス方程式 $f(x_1, \dots, x_m) = 0$ の整数解 $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}^m$ の個数を確率変数の期待値の形で表した数え上げ公式を示す。すなわち、整数係数多項式 $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ にたいして

$$\mathbb{E}[X_f] = \text{「方程式 } f(x_1, \dots, x_m) = 0 \text{ の整数解の個数」}$$

となるような確率変数 X_f を構成する。これによって、整数解の有無を決定アルゴリズムによって知ることはできないが、解の個数をサンプルの標本平均により点推定できる。

ちなみに第 7 回すうがく徒の集いにて「ディオファントス方程式の解の存在判定と数え上げについて」という講演で、ディオファントス方程式の自然数解の個数を表す式について話したのだが、その時に比べると解の符号限定しない公式にしたということと、式自体をより簡単な形にしたという点で improve している。

上記に加え、時間があれば (というか私の進捗が良ければだが) 以下の内容を話す。

先述の通り、ディオファントス方程式は決定不能なのだが、多項式の次数や変数の数を制限した場合決定可能になるのかという問題は重要である。実際、多項式の次数が二次以下の場合はディオファントス方程式が決定可能であることが知られている。正整数の二つ組 (δ, ν) に対して ν 変数 δ 次ディオファントス方程式が決定可能なら 1、そうでなければ 0 となる式を上の数え上げ公式を応用して作れないかということを考えているのだが、その取り組みについて、話せたら話したい。

参考文献

- [DAVI 1973] M.Davis *Hilbert's Tenth Problem is Unsolvable*. The American Mathematical Monthly, 80 (3) 233-269, 1973
- [MATI 1970] Matijasevic *Enumerable sets are Diophantine*. English translation: Soviet Math. Doklady, (11) 354-357, 1970
- [MATI 1971] Matijasevic *Diophantine representation of enumerable predicates*. (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. (35) 3-30, 1971
- [JONE 1982] Jones *Universal Diophantine equation*. THE JOURNAL OF SYMBOLIC LOGIC Volume 47 Number 3, 1982

- [GRUN 1981] Grunewald et.al. *How to solve a quadratic equation in integers*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 89 (1) 1-5, 1981
- [GRUN 1980] Grunewald et.al. *Some General Algorithms. I: Arithmetic Groups*. Annals of Mathematics 112 (3) 531-583 , 1980
- [CASS 1978] Cassels *RATIONAL QUADRATIC FORMS*. Academic Press London, 1978