

群は基点付き連結 1-型だよ。何か問題でも？

— HoTT/UF における群論 —

Alwe（第 10 回すうがく徒のつどい、2026 年 10 月 12 日）

ホモトピー型理論（HoTT）では、型は最初からアニマ（ ∞ -重群）であり、対象 x, y の等式型 $x = y$ は x から y への道のなす ∞ -重群である。この講演では、この見方のもとで群論を組み立て直す。出発点は「群とは、ある対象の自己同型のなす対称性である」という標語で、対象と、その同一視の仕方とをひとまとまりに扱うと、群は **基点付き連結 1-型**として定義できる：

$$\text{ConcGroup} := \sum_{(X, \text{pt}) : \mathcal{U}_*} \text{isConn}(X) \times \text{is1Type}(X).$$

主定理は、この型が古典的な（台が集合で演算を備えた）群の型 Group と型として同値であること

$$\text{ConcGroup} \simeq \text{Group}$$

である。一方向はループ空間 $\Omega(X, \text{pt}) := (\text{pt} = \text{pt})$ で、道の合成がそのまま群の演算になる。逆方向は、抽象群 G から G -torsor 全体の型 BG を一価性公理と命題切り詰めだけで構成し、 $\Omega(BG) \simeq G$ と、各対象 x を道の torsor $(\text{pt} = x)$ に送る射が同値であることを示す。群を定義するのに演算は要らず、演算は等しさの構造から出てくる。

後半では、この定義が群論の言葉をどう翻訳するかを見る。 G -集合は BG 上の型族であり、不動点集合は切断、作用重群は全空間に対応する。この辞書を使うと、「すべての n 元集合から一様に一点は選べない」ことや軌道・安定化群定理が、型族の計算として得られる。さらに群の中心は共役作用の不動点、すなわち宇宙の中の BG の二重ループ $\Omega^2(\mathcal{U}, BG)$ であり、Eckmann–Hilton の議論から中心の可換性が従う。最後に、自己同型の間の共役を射として残した自己同型 2-群、群拡大の Schreier 理論、1-型の条件を外した高次群の周期表について展望を述べる。

主な参考文献

- The Univalent Foundations Program, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, 2013.
- M. Bezem, U. Buchholtz, P. Cagne, B. I. Dundas, D. R. Grayson, *Symmetry*.
- U. Buchholtz, F. van Doorn, E. Rijke, Higher Groups in Homotopy Type Theory, LICS 2018.
- D. J. Myers, Z. Yasser, Higher Schreier Theory in Cubical Agda, J. Symb. Log. 2025.