

トポロジー

西行櫻鱒

2026 年 10 月

1 導入

トポロジーとは何でしょうか。語源を尋ねれば、場所を表す *topos* と、言葉や学を表す *logos* に行き着きます。原義的には、空間についての学問、知識を指す語とあってよいでしょう。よって、トポロジーについて考えるならば、抑も空間とは何かを考えることから始まります。

ところが、空間という語には明確な定義が与えられていません。位相幾何学、微分幾何学、複素幾何学、代数幾何学は、それぞれ異なる対象を空間として扱い、その上で連続函数、滑らかな函数、正則函数、多項式函数を考えます。どの分野でも、函数の性質は局所的に定義され、局所的に定義された函数が整合的につながったものとして大域的な函数を捉えることができます。このような点で、我々が素朴に空間と呼ぶものに対して共通の性質が認められることが分かります。

しかしこれは、空間そのものではありません。本講演では、空間を「各点で局所的に定義された函数というデータを備えていて、それを総合して大域的なデータを導出する機構を備えた対象」として捉え、数学的な定義に直し、そこから何が得られるかを調べます。

2 概要

まず、三つの古典的な例を観察します。解析学の「局所的に成り立つ性質」、函数論の函数要素とその芽、可換環論の局所化です。扱うデータは真偽、集合、アーベル群と異なりますが、どれも、各点の近傍系に亘って積を取り、適切な同一視によって割るという形をしています^{*1}。

この共通の形を、 V を判断の体系^{*2}とし、 X を小 V -圏 X とするとき、函手圏 $[X, V]$ 上の左完全余モナド G として定式化します。 G を V -トポロジーと呼び、組 $\langle X, G \rangle$ を V -空間と呼びます。 G の余代数を空間の上の対象と捉えるとき、Beck–Dubuc の定理により、余代数の圏として記述される圏は三つの条件によって特徴づけられ、これは「局所的なデータを取る函手」が満たすべき条件だと解釈できます。

次に、 G が有界であるとき、余代数の圏が豊穡前層圏の左完全反映の局所化として表示されることを説明します。この表示を持つ圏を V -ログスと呼びます。諸結果を概観しながら、 $V = \mathbf{2}$, $\mathbf{Set}$, $\mathbf{Ab}$ の場合にフレーム、Grothendieck トポス、Grothendieck アーベル圏が現れることを確かめます。

後半では、二つの方向に進みます。一方は $V = \mathbf{2}$ と $V = \mathbf{Set}$ の比較です。位相空間の圏化はインナドであり、芦景（ロケール）の圏化は Grothendieck トポスであることを述べます。この見方は、両者を結ぶ冪等随伴、概念的完全性などの話題との関わりがあるという点で意義深く、また、「十分な点を持つ」という仮定への示唆を与える点で興味深いです。また、 $\mathbf{2}$ から $\mathbf{Set}$ へ移行するという操作についても考察します。他方は $V = \mathbf{Ab}$ の場合です。降下理論と淡中双対性が同じ枠組みに収まることを見た上で、この枠組みに見えていないものを考えます。

本講演は位相空間論、環論、圏論の基礎に親しんでいることを適宜仮定します。途中から高級な道具も使いますが、具体的な例の観察に多くの時間を使う予定ですので、必ずしも知らなくても差し支えないようにしたいと思っています。

^{*1} 今回抽象する構造は層ではないことに注意します。層との関係は後に明らかになります

^{*2} これはよい対称モノイド閉圏として定義します。