# 有理ホモトピー論と有理ホモトピー型の計算

ちょーさん

2021/3/20

# 有理ホモトピー型

位相空間 $X$ について $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ を $X$ の有理ホモトピー群という．また $\pi_*(X)$ がそれ自身 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間となるとき $X$ は $\mathbb{Q}$ 空間であるという.

## 命題 1.1

単連結な *CW* 複体 $X$ に対してある $\mathbb{Q}$ 空間 $X_0$ と連続写像 $\ell\colon X \to X_0$ が存在して以下を満たす．: 任意の $\mathbb{Q}$ 空間 $Y$ への任意の任意の連続写像 $f\colon X \to Y$ について連続写像 $f_0\colon X_0 \to Y$ がホモトピーを除いて一意に存在して $f \simeq f_0 \circ \ell$ と分解する.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\ell"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & Y \\ X_0 \arrow[ur, dashed, "f_0"'] & \end{tikzcd}$$

このとき $X_0$ を $X$ の有理ホモトピー型という.

命題 1.1 の証明には Postnikov 分解を用いる.

## 補題 1.2 (Postnikov 分解)

任意の連結 CW 複体 $X$ について以下の性質を満たす可換図式がホモトピーを除いて一意に存在する.

$$
\begin{tikzcd}
& \vdots \arrow[d, "f_4"] \\
& X_{(3)} \arrow[d, "f_3"] \\
& X_{(2)} \arrow[d, "f_2"] \\
X \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[uur] & X_{(1)} = K(\pi_1(X), 1)
\end{tikzcd}
$$

(1) $i > n \Rightarrow \pi_i(X_{(n)}) = 0$

(2) $i \leq n \Rightarrow \pi_i(X) \to \pi_i(X_{(n)})$ は同型

(3) $f_n$ は fibration $K(\pi_n(X), n) \to X_{(n)} \to X_{(n-1)}$

**補題 1.3 (Sullivan)**

単連結位相空間の間の連続写像 $\ell \colon X \to Y$ について以下は同値である．

(1) $Y$ は $X$ の有理ホモトピー型

(2) 任意の $i \geq 2$ について $\ell_* \colon \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ は同型 $\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \pi_i(Y)$ を導く

(3) 任意の $i \geq 2$ について $\ell_* \colon H_i(X) \to H_i(Y)$ は同型 $H_i(X) \otimes \mathbb{Q} \cong H_i(Y)$ を導く

この補題より連続写像 $\ell$ は $X$ の 0 における局所化ともよばれる．

命題 1.1 の証明の方針）$X$ の Postnikov 分解を考えて $X_{(n)}$ の $0$ における局所化を帰納的に構成する．

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] \\
 & X_{(4)} \arrow[d] \\
 & X_{(3)} \arrow[d] \\
X \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[uur] & X_{(2)} = K(\pi_2(X), 2)
\end{tikzcd}
$$

帰納法の各段階で Postnikov 不変量を局所化することでホモトピー群を局所化できる．よって補題 1.3 により $0$ における局所化が得られる．□

# 次数付き微分代数

### 定義 2.1 (cdga)

直和分解された $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $A=\bigoplus_{k=0}^{\infty} A^k$ 上に双線形な積 $A^k \times A^l \to A^{k+l}$ と線形写像 $d\colon A^k \to A^{k+1}$ が定義されて以下を満たすとき $A$ を可換次数付き微分代数 *(cdga)* という.

(1) $x(yz)=(xy)z$

(2) 積について単位元 $1 \in A^0$ をもつ

(3) $x \in A^k, y \in A^l \Rightarrow xy=(-1)^{kl}yx$

(4) $d \circ d = 0$

(5) $x \in A^k \Rightarrow d(xy)=d(x)y+(-1)^k x d(y)$

$x \in A^k$ のとき $x$ の次数は $k$ であるといい $|x|=k$ と書く.

# 次数付き微分代数

## 定義 2.2

(1) *cdga* $A$ がある次数付きベクトル空間 $V$ を用いて

$$A = \mathrm{Sym}(V^{even}) \otimes \mathrm{Ext}(V^{odd})$$

と書けるとき $A$ は自由 *(free)* であるという．このとき $A = \wedge V$ と書く．

(2) *cdga* $A$ は $A^0 = \mathbb{Q}$ となっているとき連結 *(connected)* であるという．

(3) *cdga* $A$ が連結自由でその微分 $d$ の像が *decomposable* である，つまり任意の $a \in A$ についてその微分が

$$da = \sum_i x_i y_i \ (|x_i|, |y_i| > 0)$$

という形をしているとき $A$ は *minimal* であるという．

# Hirsch 拡大と一般冪零

## 定義 2.3 (Hirsch 拡大)

$A \subset B$ を連結部分 *dga* としてある有限次元線形空間 $V$，非負整数 $k$ があって以下を満たすとき $B$ を $A$ の *Hirsch* 拡大（*Hirsch extension*）という．

(1) *ga* としての同型 $B \cong A \otimes \wedge(V)_k$.

(2) この同型で同一視して $\forall v \in V \ dv \in A^{k+1}$

ただし $(V)_k$ は $V$ を次数 $k$ の次数付きベクトル空間とみしたもの．

## 定義 2.4

$A$ を自由な *cdga* とする．*Hirsch* 拡大の列

$$A_0 = \mathbb{Q} \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots$$

があって $A = \bigcup_k A_k$ となるとき $A$ は一般冪零（*generalized nilpotent*）であるという．

# minimal model

cdga の間の写像で次数付き代数の構造を保存し微分 $d$ と交換するものを dga 写像とよぶ．dga 写像にもホモトピーが定義できることが知られている．

**命題 2.5**

$A$ を $H^0(A) = \mathbb{Q}$ なる *cdga* とするとき以下が成立する．

(1) 一般冪零かつ *minimal* な *cdga* $M$ と *dga* 写像 $\rho\colon M \to A$ が存在して同型 $H^*(A) \cong H^*(M)$ を導く．

(2) この $M$ と $\rho$ はホモトピー同値を除いて一意である．

このとき $M$ を $A$ の *minimal model* という．

# 次数付きリー代数

## 定義 3.1 (次数付きリー代数)

次数付きベクトル空間 $L$ 上に括弧積 $[,]: L^p \otimes L^q \to L^{p+q-1}$ が定義されていて以下を満たすとき次数付きリー代数という.

(1) $[a,b] = (-1)^{|a||b|}[b,a]$

(2) $(-1)^{|c||a|}[[a,b],c] + (-1)^{|a||b|}[[b,c],a] + (-1)^{|b||c|}[[c,a],b] = 0$

## 例 3.2

（単連結な）位相空間 $X$ についてそのホモトピー

$$\pi_*(X) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \pi_i(X)$$

は Whitehead 積 $\pi_i(X) \otimes \pi_j(X) \to \pi_{i+j-1}(X)$ を括弧積として次数付きリー代数になる.

# 次数付きリー代数 vs 次数付き微分代数

$A$ を連結自由な cdga とする．次数付きベクトル空間 $I(A)$ を

$$I(A) = A^+/\langle A^+A^+\rangle$$

とおくと $A \cong \wedge I(A)$ となる．さらに $\pi_i(A)$ を次で定義する．

$$\pi_i(A) = \mathrm{Hom}(I(A)^i, \mathbb{Q})$$

$A$ には微分 $d\colon A^k \to A^{k+1}$ があるのだった．
そこで $i+j=k+1$ なる組 $i,j,k$ について写像

$$I(A)^k \xrightarrow{incl} A^k \xrightarrow{d} A^{k+1} \xrightarrow{proj} I(A)^i \otimes I(A)^j$$

を考え，この双対をとることで $\pi_*(A)$ の括弧積

$$\pi_i(A) \otimes \pi_j(A) \to \pi_{i+j-1}(A)$$

が得られる．これにより $\pi_*(A)$ は次数付きリー代数となる．

## 例 3.3

$V$ を有限次元ベクトル空間とするとき Grassmann 代数 $\wedge V$ は自然に次数付き代数となる．そこで Grassmann 代数 $\wedge V$ 上に微分 $d\colon \wedge^k V \to \wedge^{k+1} V$ が定義されて cdga をなしていると仮定しよう．このとき微分 $d$ は生成元の微分

$$d\colon V \to V \otimes V$$

で決まる．この双対写像をブラケットで

$$[\cdot,\cdot]\colon V^* \otimes V^* \to V^*$$

と書くことにする．このとき

$$d \circ d = 0 \Leftrightarrow [\cdot,\cdot] \text{ の Jacobi identitiy}$$

となっていることが直接計算で確認できる．
従って $(V^*, [\cdot,\cdot])$ は通常の意味の Lie 代数となる．

# 有理ホモトピー論の基本定理

単体分割された位相空間 $K$ に対して de Rham algebra とよばれる $\mathbb{Q}$-cdga $A^*_{\mathbb{Q}}(K)$ を構成する方法がある．
次の定理が有理ホモトピー論の主定理となる．

## 定理 3.4 (Sullivan 1977)

$K$ を単連結な単体複体でホモトピー群が有限型とする．$K_0$ を $K$ の有理ホモトピー型，$M_K$ を $A^*_{\mathbb{Q}}(K)$ の *minimal model* とする．このとき $i \geq 2$ において以下の次数付き *Lie* 代数としての自然な同型が成り立つ．

$$\pi_i(K_0) \cong \pi_i(M_K)$$

つまり $K$ に対してその有理ホモトピー型と *minimal model* は互いに双対である．

## Additional topics

定理 3.4 の単連結の条件は冪零空間とよばれるクラスまで一般化できることが知られている.

**定義 3.5**

位相空間 $X$ が以下を満たすとき $X$ を冪零空間 *(nilpotent space)* という.

(1) $\pi_1(X)$ は冪零群である

(2) $\pi_1(X)$ の $\pi_n(X)$ への作用は冪零である

**注意 3.6**

単連結空間は冪零空間である.

# Additional topics

定理 3.4 の単連結の条件は冪零空間とよばれるクラスまで一般化できることが知られている.

**定義 3.5**

位相空間 $X$ が以下を満たすとき $X$ を冪零空間 (*nilpotent space*) という.

(1) $\pi_1(X)$ は冪零群である

(2) $\pi_1(X)$ の $\pi_n(X)$ への作用は冪零である

**注意 3.6**

単連結空間は冪零空間である.

定理 3.4（の一般化）は圏論的には連結冪零有限型空間のなすモデル圏とコホモロジー連結有限型 cdga のなすモデル圏の間の Quillen 同値として書ける（らしい）.

### 定義 4.1 (rationally elliptic)

単連結な位相空間 $X$ は次の条件が成り立つとき *rationally elliptic* であるという.

$$\sum_{p\geq 2} \dim H^p(X;\mathbb{Q}) < \infty \ , \ \sum_{p\geq 2} \dim \pi_p(X)\otimes\mathbb{Q} < \infty$$

またこのとき $H^n(X;\mathbb{Q}) \neq 0$ となる最大の $n$ を $X$ の次元とよぶ.

### 定理 4.2 (Friedlander,Halperin 1979)

$X$ が $n$ 次元の *rationally elliptic space* のとき以下が成り立つ.

(1) $n = \sum_q (2q-1)\dim \pi_{2q-1}(X)\otimes\mathbb{Q} - \sum_q (2q-1)\dim \pi_{2q}(X)\otimes\mathbb{Q}$

(2) $\sum_q 2q \dim \pi_{2q}(X)\otimes\mathbb{Q} \leq n$

(3) $\sum_q (2q-1)\dim \pi_{2q-1}(X)\otimes\mathbb{Q} \leq 2n-1$

定理 3.4 と定理 4.2 を用いて十分高い連結性をもつ closed rationally elliptic manifold の有理ホモトピー型が分類できた.

### 定理 4.3

*simply connected closed rationally elliptic 5-manifold* の有理ホモトピー型は $S^5$ , $S^2 \times S^3$ のみである.

### 定理 4.4 (O)

*2-connected closed rationally elliptic 7-manifold* の有理ホモトピー型は $S^7$ , $S^3 \times S^4$ のみである.

### 定理 4.5 (O)

*3-connected closed rationally elliptic 9-manifold* の有理ホモトピー型は $S^9$ , $S^4 \times S^5$ のみである.

さらに定理 4.3, 定理 4.4, 定理 4.5 の結果を以下のように一般化できた.

### 定理 4.6 (O)

$(n-1)$-*connected closed rationally elliptic* $(2n+1)$-*manifold* の有理ホモトピー型は $S^{2n+1}$ , $S^n \times S^{n+1}$ のみである.

証明はいずれの場合も本質的に同じなのでここでは 9 次元の場合についてのみ証明の概略を述べる.

証明の概略）$M$ を 3-connected closed rationally elliptic 9-manifold として $\dim \pi_n(M) \otimes \mathbb{Q} = \dim \pi_n$ と書くことにする．定理 4.2 の (2) と (3) より以下がわかる．

$$4 \dim \pi_4 + 6 \dim \pi_6 + 8 \dim \pi_8 \leq 9 \tag{4.1}$$

$$5 \dim \pi_5 + 7 \dim \pi_7 + \cdots + 17 \dim \pi_{17} \leq 17 \tag{4.2}$$

またこれらに注意すると定理 4.2 の (1) より

$$5 \dim \pi_5 + 7 \dim \pi_7 + n \dim \pi_n - (m-1) \dim \pi_m = 9 \tag{4.3}$$

が成り立つ．ただし $9 \leq n \leq 17$ は奇数，$4 \leq m \leq 8$ は偶数．

式 (4.1),(4.2) に注意しながら式 (4.3) を満たすホモトピー群の次元を考える．式 (4.1) より $\dim \pi_m$ の値としては以下の可能性が挙げられる．

(a) $\dim \pi_4 = \dim \pi_6 = \dim \pi_8 = 0$

(b) $\dim \pi_4 = 1 \ (\dim \pi_6 = \dim \pi_8 = 0)$

(c) $\dim \pi_4 = 2 \ (\dim \pi_6 = \dim \pi_8 = 0)$

(d) $\dim \pi_6 = 1 \ (\dim \pi_4 = \dim \pi_6 = 0)$

(e) $\dim \pi_8 = 1 \ (\dim \pi_4 = \dim \pi_8 = 0)$

それぞれの場合について考察していく．ここでは (b) のときのみ調べることにする．

(b)$\dim \pi_4 = 1$ のとき式 (4.3) は

$$5 \dim \pi_5 + 7 \dim \pi_7 + n \dim \pi_n - 3 = 9$$

これを満たすのは $\dim \pi_5 = \dim \pi_7 = 1$ のときのみ．つまりこのとき有理ホモトピー群は

$$\pi_i(M) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q} & (i = 4, 5, 7) \\ 0 & (\text{other}) \end{cases}$$

となる．よって定理 3.4 より $M$ の minimal model $(\wedge V, d)$ は

$$V^i = \begin{cases} \mathbb{Q} & (i = 4, 5, 7) \\ 0 & (\text{other}) \end{cases}$$

となる．

まとめると $M$ の minimal model は次の形である．

$$(\wedge V, d) = (\wedge(x_4, y_5, z_7), d)$$

ただし添字は各生成元の次数．
微分 $d$ については，まず 5 次の decomposable element がないことから $dx = 0$．同様に $dy = 0$ もわかる．ここで Poincare duality と 3-connected の仮定から

$$H^8(M) \cong H^1(M) = 0$$

となるので cocycle $x^2 \in (\wedge V)^8$ はコホモロジーで $0$ になる．このことから $dz = x^2$ となる．
以上より微分は $dx = 0, dy = 0, dz = x^2$ であり，これは $S^4 \times S^5$ の model である．

他の場合も同様に調べると以下のようになる.

(a) $S^9$ の model
(b) $S^4 \times S^5$ の model
(c) 不適
(d) 不適
(e) 不適

よって $S^9, S^4 \times S^5$ のみである. $\square$

# 参考文献


1. 森田茂之, 「特性類と幾何学」, 岩波書店, 2008
2. Y.Felix,"Algebraic Models in Geometry",Oxford Graduate Texts in Mathematics, 2008
3. Y.Felix, S.Halperin, J.C.Thomas, "Rational Homotopy Theory", Springer, 2001
4. P.Griffiths,J.Morgan, "Rational Homotopy Theory and Differential Forms", Springer, 2013
5. D.Quillen, "Rational homotopy theory", Ann.Math.90. 205 295, 1969
6. D.Sullivan, "Infinitesimal compitations in topology", Publ.IHES. 47, 269 331, 1977
7. A.K.Bousfield and V.K.A.M.Gugenheim, "On PL de Rham theory and rational homotopy type", Mem.Amer.Math.Soc., 8(179), ix+94,1976