ぼくのかんがえた

さいじゃくのすうがく

レジュメ

2021/3/20 すうがく徒のつどい@オンライン

本資料について

- 本資料は、「すうがく徒のつどい@オンライン」で発表する「ぼくのかんがえたさいじゃくのすうがく」での発表内容を配布用に簡単にまとめたものです。
- 上記発表で利用する資料の中から、本題にあたるものだけを抜き出しています。また必要に応じて加筆・修正しています。そのため、発表資料とは構成が異なります。
- 本資料の内容に関する著作権はすべて以下に属します。
  - はけん@数学 (Twitter: @haken_math)

研究の動機

- 通常、より強い数学へと学習を進める
- 強い数学を理解するには、先にその基礎となる数学を理解することが必要となる
- 反対に、基礎となる「弱い」数学へと辿っていくと、どこまで遡れるのか？ということを考えてみる

数学の基礎付け

… ← … ← … ← … ← … ←

確率微分
方程式

偏微分
方程式

確率論

解析学

組み合わせ論

関数解析

整数

…

微積分

表現論

線形代数

ガロア
理論

実数

…

代数的
整数論

集合論

代数学

図形

リー群

位相空間

ホモロジー
代数

論理学

多様体

… ← … ← … ← … ←

数学基礎論

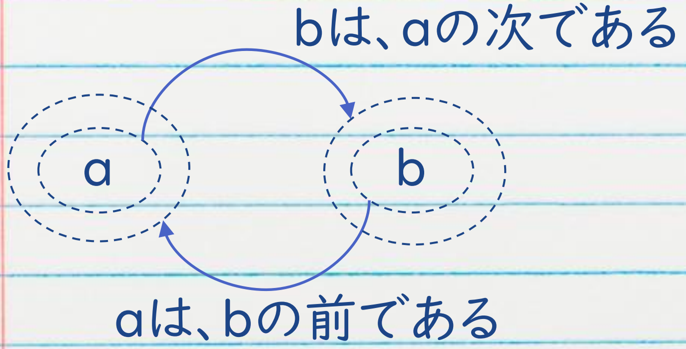
- 数学の基礎となる理論は「数学基礎論」とよばれる
- 数学基礎論へのアプローチは様々である
  - 集合論にもとづくもの
  - 圏論にもとづくもの
  - その他、様々な手法
- 本研究では、集合論や圏論ではなく、なるべく理解のために必要な情報が少ない基礎付けを模索する

研究の方針

- 最も簡単な基礎付けを得るために、誰もが理解できるであろう簡単な数学の問題を題材として考える
- 以下のような問題を取り扱う
  - 1＋1＝2を証明せよ

数の定義

- 0は、空数である
- 1は、0の次である
- 2は、1の次である



和a+bの定義

- 空数bに対し
  - ⇒a+b=a

- aの次c、bの前dに対し
  - a+b=c+d

1+1=2の形式的証明

I. 1は、0の次である。よって、0は1の前である。
II. 1の次2と、1の前0に対して、1+1=2+0
III. 0は空数である。よって、2+0=2
IV. 1+1=2+0、および、2+0=2、より、1+1=2

1+1=2の証明に対する考察

- 数の定義および和の定義より、1+1=2を4つのステップで証明することができる
- 証明は一見正しいが、「なぜそれで証明したと言えるのか」は説明されていない。
- 次は以下の問題を取り扱う
    - 「1+1=2の証明」が正しいことを証明せよ

- 注意：一般的な自然数の公理化である「ペアノの公理」とは異なる。今回の定義では、帰納法が使えない。しかし、今回の目的に必要な最小限に定義を絞っている

証明を証明する方針

- 証明に現れたⅠ～Ⅳは、どれも同じような構造となっている。
  - f(x)⇒g(x)という関係性が知られている
  - 前提条件f(x)、帰結g(x)のxに同じ数tを代入し、「f(t)、よって、g(t)」という文章になる
  - f(t)は定義として与えられているか、または、先に証明したg(t)と一致するかになっている。

1+1=2の証明の直観的証明(1)

I. 1は、0の次である。よって、0は1の前である。
II. 1の次2と、1の前0に対して、1+1=2+0
III. 0は空数である。よって、2+0=2
IV. 1+1=2+0、および、2+0=2、より、1+1=2

前の定義

前提条件		帰結
bはaの次	⇒	aはbの前

1　0

1+1=2の証明の直観的証明(2)

I.　1は、0の次である。よって、0は1の前である。
II.　1の次2と、1の前0に対して、1+1=2+0
III. 0は空数である。よって、2+0=2
IV. 1+1=2+0、および、2+0=2、より、1+1=2

和の定義

前提条件		帰結
cはaの次、dはbの前	⇒	a+b=c+d

2　1　0　1

1＋1＝2の証明の直観的証明(3)

I.　1は、0の次である。よって、0は1の前である。
II.　1の次2と、1の前0に対して、1＋1＝2+0
III. 0は空数である。よって、2+0=2
IV. 1＋1＝2+0、および、2+0=2、より、1＋1＝2

和の定義

前提条件		帰結
bは空数	⇒	a＋b ＝a

2　　0

1+1=2の証明の直観的証明(4)

I.　1は、0の次である。よって、0は1の前である。

II.　1の次2と、1の前0に対して、1+1=2+0

III. 0は空数である。よって、2+0=2

IV. 1+1=2+0、および、2+0=2、より、1+1=2

推移律

前提条件

a=b、および、b=c　⇒

帰結

a＝c

1+1　2+0　2

1＋1＝2の証明に関わるもの(1)

I.　1は、0の次である。よって、0は1の前である。
II.　1の次2と、1の前0に対して、1＋1＝2+0
III. 0は空数である。よって、2+0＝2
IV.　1＋1＝2+0、および、2+0＝2、より、1＋1＝2

登場するもの：
情報：aはXである
推件：A、よって、B
組：aとb

※a=bも、「(a, b)は左右が等しい組である」という情報

1+1=2の証明に関わるもの(2)

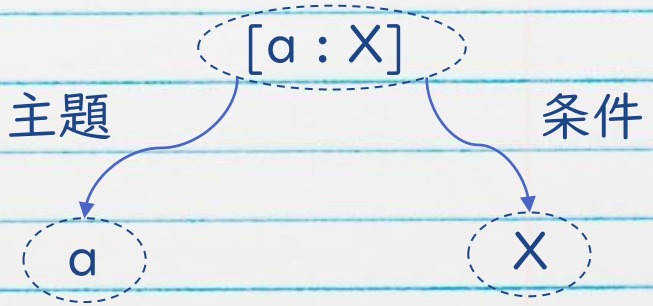
数学という場がある。今回の数学の場をτとする。

1+1=2の証明問題の整理

- 数学τは以下を定義とする
  - 0は、空数である
  - 1は、0の次である
  - 2は、1の次である
  - aはbの前である、と、bはaの次である、は同義
  - bが空数であるならば、a+b=a
  - aの次c、bの前dに対し、a+b=c+d
- 証明したいこと
  - τが1+1=2を証明する

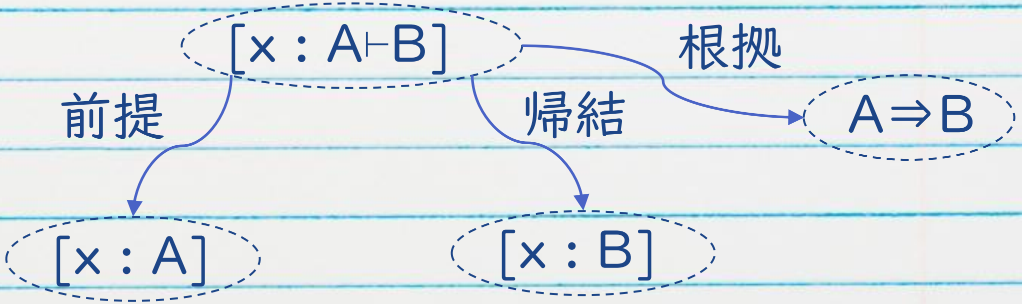
情報の定義

- 「aはXである」という情報を、[a : X]で表す。
- 情報I=[a : X]に対し、
  - aをIの主題
  - XをIの条件
- 情報を使った数の定義
  - [0 : 空数]
  - [1 : 0の次]
  - [2 : 1の次]



推件

- [x : A]から[x : B]を導く推件を、[x : A⊢B]で表す
- 推件S=[x : A⊢B]に対し、
    - [x : A]をSの前提
    - [x : B]をSの帰結
    - A⇒BをSの根拠



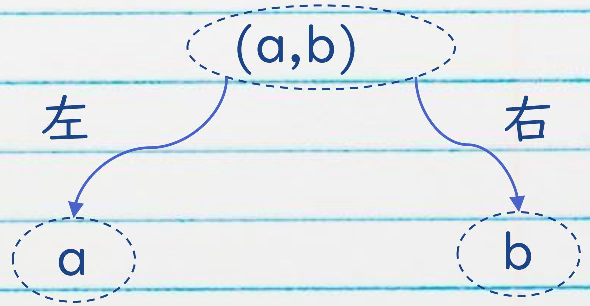
定義と証明

- 数学 ϕ で情報Iが成立することを、$\phi \vDash I$ で表す
    - 特に、Iが定義であるとき、$\phi \Vdash I$

- 前提と根拠が ϕ で成立する推件Sが取れるとき、ϕ でSの結論を証明できるとする
    - $S=[x : A \vdash B]$ のとき、$\phi \vdash [x : B]$ と書く
    - $\phi \vdash I$、ならば、$\phi \vDash I$

組

- aとbの組を、(a,b)で表す
- 組t = (a,b)に対し、
  - aをtの左
  - bをtの右



1＋1＝2の証明の形式的証明(1)

I. 1は、0の次である。よって、0は1の前である。
    - 前提…[(0, 1)：右が左の次であるような組]
    - 帰結…[(0, 1)：左が右の前であるような組]
    - 根拠…左が右の次であるような組⇒右が左の前であるような組

- 前提は定義[1：0の次]と同義、よって、$\tau \vDash$ Iの前提
- 根拠は、前に関する定義を意味しており、$\tau \Vdash$ Iの根拠
- したがって、$\tau \vdash$ Iの帰結、すなわち、$\tau \vdash$[0：1の前]

1+1=2の証明の形式的証明(2-1)

- C1(t)=「左がtの左の次、右がtの右の前であるような組」
- C2(t)=「tの左+tの右=左+右であるような組」

Ⅱ'. 和の定義より、C1(1,1)⇒C2(1,1)が成り立つ

- Ⅱ'の根拠、任意の組⇒(C1⇒C2となるtのような組)
  - これは、和の定義になっており、$\tau \Vdash$ Ⅱ'の根拠
- Ⅱ'の前提は無条件に成り立つから、$\tau \vdash$ Ⅱ'の帰結

1+1=2の証明の形式的証明(2-2)

II.　1の次2と、1の前0に対して、1+1=2+0

- 前提…[(2,0)：C1(1,1)]
- 帰結…[(2,0)：C2(1,1)]

- 前提1=[(2,0)の左：(1,1)の左の次]
  - 定義[2：1の次]と同義より、τ⊨IIの前提1
- 前提2=[(2,0)の右：(1,1)の右の前]
  - Iの結論[0：1の前]と同義より、τ⊨IIの前提2
- IIの根拠=II'の帰結であり、τ⊨IIの根拠
- したがって、τ⊢IIの帰結、すなわち、τ⊢(1+1=2+0)

1＋1＝2の証明の形式的証明(3)

- C3(a)＝「a+それ自身＝aであるようなもの」

Ⅲ’. 空数⇒C3(2)
  - Ⅱ’と同じように和の定義から無条件に$\tau\vdash$Ⅲ’の帰結

III. 0は空数である。よって、2+0=2
  - 前提…[0：空数]
  - 帰結…[0：C3(2)]

- $\tau \Vdash$Ⅲの前提、$\tau \vDash$Ⅲの根拠であるから、$\tau\vdash$Ⅲの帰結
- すなわち、$\tau\vdash(a+0=a)$

1＋1＝2の証明の形式的証明(4-1)

推移律:　　　左と右がC4、そして、C5 ⇒ C6
- C4＝「左＝右であるような組」
- C5＝「左の右＝右の左であるような組」
- C6＝「左の左＝右の右であるような組」

C5を満たす((a,b),(b,c))という項を考えると
- 前提1は[((a,b),(b,c))の左 : C4]、すなわち、a=b
- 前提2は[((a,b),(b,c))の右 : C4]、すなわち、b=c
- 帰結は[((a,b),(b,c)) : C6]、すなわち、a=c

1＋1＝2の証明の形式的証明(4-2)

IV. 1＋1＝2+0、および、2+0=2、より、1＋1＝2
- 前提…[((1＋1,2+0), (2+0, 2))：推移律の前提]
- 帰結…[((1＋1,2+0), (2+0, 2))：推移律の帰結]

- 以下のことから、τ⊨Ⅳの前提
  - t=((1＋1,2+0), (2+0, 2))とおくと、[t：C5]
  - Ⅱの帰結1＋1＝2+0より、τ⊨[tの左：C4]
  - Ⅲの帰結2+0=0より、τ⊨[tの右：C4]
- したがって、τ⊢Ⅳの帰結、すなわち、τ⊢(1＋1＝2)

証明の証明に対する考察

- Ⅰ～Ⅳがすべて、前提と根拠が成立する推件となっており、したがって帰結を証明していること、を証明できた
- ただし、A⇒Bを根拠にした推件であることを示すために、前提と帰結の情報の主題を揃える必要がある
  - 組(a,b)を導入して、主題が揃うように定義も書き換えている
  - このような言い換えを含んでいるときに、「なぜそれで証明したと言えるのか」は説明されていない。
- 次は以下の問題を取り扱う
  - 「1＋1＝2の証明の証明」が正しいことを証明せよ

1+1=2の証明の証明を証明せよ

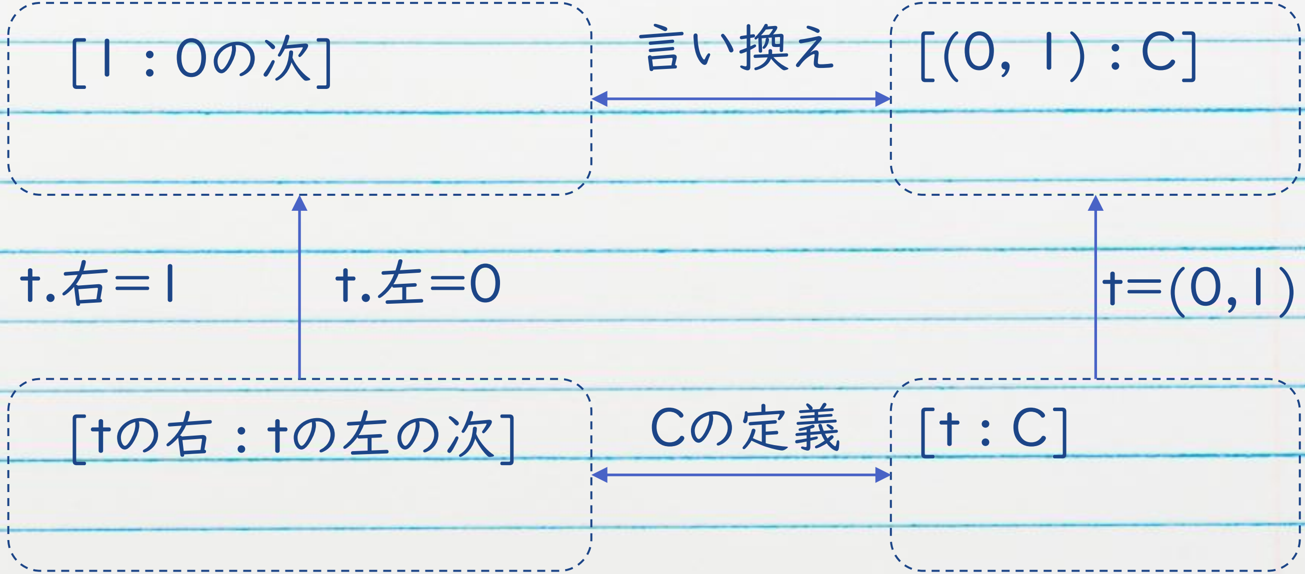
- $\tau \vdash 1+1=2$を証明するための数学をτ'とおく
- $\tau' \vdash \tau \vdash 1+1=2$を示すためにやるべきこと
  - 「τの推件が証明になっているか」を示すτ'の推件が証明になっているか
- ポイント:以下のことを証明する
  - 言い換え問題…[1 : 0の次]から、[(0, 1) : 右が左の次であるような組]への言い替え
  - 天下りで現れた推移律

言い換え問題の抽出

- 数学τ'は以下を定義する
  - Ｉの前提=[(0, 1)：右が左の次であるような組]
  - τ⊩[1：0の次]
- 証明したいこと
  - τ'⊢(τ⊨Ｉの前提)

言い換え問題の直観的な証明

- C=右が左の次であるような組
- どんなtについても数学が等しくなるようにCを定義



言い換え問題に関わるもの

- 数学τ'は以下を定義する
  - Iの前提=[(0, 1)：右が左の次であるような組]
  - τ⊩[1：0の次]
- 証明したいこと
  - τ'⊢(τ⊨Iの前提)

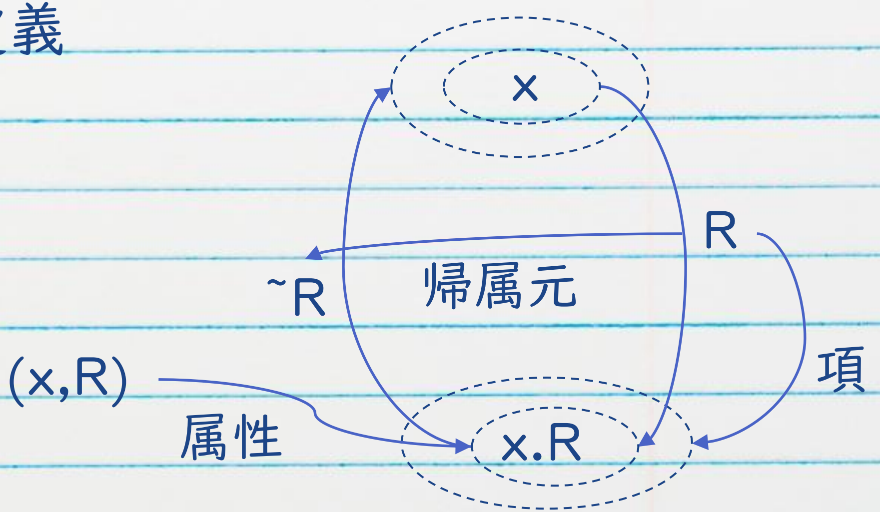
登場するもの：

属性：aのR

内包：RがCであるようなもの

属性の定義

- ものxに対してRの関係性にあたる属性を、x.Rで表す。
- 属性A=x.Rに対して、
  - xはAのRの帰属元(A.~R)
  - AはRの項(R.項)
- 例…属性を使った組の定義
  - (0,1).左=0
  - (0,1).右=1



Leibniz’s law

- a=bの定義
  - $\models[c,X]$=([c : X]が成立するような数学)
  - $\models[a,X] \Rightarrow \models[b,X]$、そして、$\models[b,X] \Rightarrow \models[a,X]$
- “Identity of indiscernibles”とも呼ばれる
  - 不可識別者の同一性
  - in(反義)+dis(分離)+cern(識)+able(可能)+s(者)

$$[a : X] \longrightarrow [b : X]$$

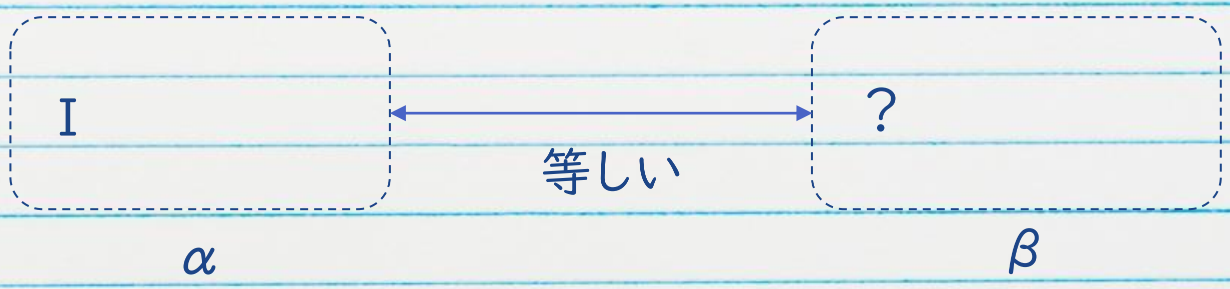
$$[b : Y] \longrightarrow [a : Y]$$

Leibniz's lawによる推移律の証明

- 推移律の証明
  - [a : X]が成立するϕを考える
    - a=bを根拠に$\phi \vDash$[b : X]
    - b=cを根拠に$\phi \vDash$[c : X]
  - したがって、$\vDash$[a:X]$\Rightarrow \vDash$[c:X]
  - 同様に、$\vDash$[c:X]$\Rightarrow \vDash$[a:X]も成り立つ
  - Leibniz's lawの定義より、a=c

数学の等価性

- 数学α, βが$\alpha = \beta$のとき
  - 情報Iに対し、$\vDash$I=(Iが成立するような数学)
  - $\phi \vDash [\alpha : \vDash \mathrm{I}]$のとき、$\phi \vdash [\beta : \vDash \mathrm{I}]$である
  - すなわち、$\alpha \vDash \mathrm{I}$のとき、$\beta \vDash \mathrm{I}$が証明できる



情報の言い換え

- αで成立する情報が常にβで成立するとき、$\alpha \subset \beta$と書く
- $\alpha \subset \beta$、$\beta \vDash$I、そして、$\alpha \subset \gamma$、$\gamma \vDash$Iであるようなγはすべて$\beta \subset \gamma$であるとき、βを$\alpha + \vDash$Iと書く
- $\alpha + \vDash$I$=\alpha + \vDash$Jのとき、α上で情報IとJが言い換えできる。
- 任意の数学上で言い換えできるとき、I←→Jと書く

J1, J2, … $\subset$ I J1, J2, … $\subset$ I, … J1, J2, …

α $\beta = \alpha + \vDash$I γ

内包の定義

- [x:C]←→x.R、そして、xを含まないようなCを内包とよび、{x *s.t.* x.R}と書く
- 例
  - C={t *s.t.* [t.右 : t.左.次]}とすると
  - [t : C]と[t.右 : t.左.次]が言い換え可能

$\boxed{} \subset \boxed{x.R} = \boxed{[x : \{x\ s.t.\ x.R\}]}$

α (xは未知)　　$\beta = \alpha + \vDash x.R$　　$\gamma = \alpha + \vDash [x : \{x\ s.t.\ x.R\}]$

内包の別表記

- 「TがSであるようなもの」
  - R=(xに対して[x.T : x.S]を取るような関係)の内包
  - {x *s.t.* [x.T : x.S]}を、{T : S}とも書く
- xに対してx.S1.S2を取るような関係を、S1∘S2と書く

- 上記のもと、「右が左の次であるような組」は
  - {右 : 左∘次}で定義できる

言い換え問題の形式的証明(1)

S0:　[x.右：x.左.次]←→[x:{右:左∘次}]

- 内包.定義より、[x.右:x.左∘次]←→[x:{右:左∘次}]
- 左∘次の定義より、x.左∘次=x.左.次

S1:　[1:0.次]←→[(0,1):{右：左∘次}]

- (0,1)に対してS0.帰結を根拠にする
- 左と右の定義より、[(0,1).右:(0,1).左.次]=[1:0.次]

- τ'⊨S1.根拠より、τ'⊢S1.帰結

言い換え問題の形式的証明(2)

S2:　$\tau \vdash\!\models$[1:0.次]$=\tau \vdash\!\models$[(0,1):{右：左∘次}]

- 前提…τは任意の数学
- 根拠…任意の数学⇒{α s.t. $\alpha \vdash\!\models$[1:0.次]$=\alpha \vdash\!\models$[(0,1):{右：左∘次}]}

- 言い換え.定義より、S2.根拠=S1.帰結、より、$\tau' \models$S2.根拠
- したがって、$\tau' \vdash$S2.帰結

言い換え問題の形式的証明(3)

S3: $\{\alpha \ s.t.\ \alpha \vDash I\} \Rightarrow \{\alpha \ s.t.\ \alpha + \vDash I = \alpha\}$

- Iが成立するαを考える
- S3-1＝$\alpha \subset \alpha$、これは$\subset$.定義より成立
- S3-2＝$\alpha \vDash I$
- S3-3＝$\alpha \subset \gamma$、$\gamma \vDash I$であるようなγはすべて$\alpha \subset \gamma$
- S3-1～S3-3を前提、$+\vDash$.定義を根拠に、$\alpha = \alpha + \vDash I$

言い換え問題の形式的証明(4)

S4: $\{\alpha \ s.t.\ \alpha \vDash I、\alpha + \vDash I = \alpha + \vDash J\} \Rightarrow \{\alpha \ s.t.\ \alpha \vDash J\}$

- $\alpha \vDash I、\alpha + \vDash I = \alpha + \vDash J$が成立する$\alpha$を考える
- S3.帰結より、$\alpha + \vDash I = \alpha$
- 推移律より、$\alpha = \alpha + \vDash J$
- Leibniz's lawより、$\alpha \vDash J$

S4': S4を根拠に、以下のI, Jから得られる帰結

- I=[1:0.次]
- J=[(0,1):{右：左◦次}]

言い換え問題の形式的証明(5)

S5: $\tau \vDash [(0,1):\{右:左\circ次\}]$

- 根拠…S4’.帰結

- S5.前提は、τ.定義およびS2.帰結より成立する
  - $\tau \vDash [1:0.次]$
  - $\tau + \vDash [1:0.次] = \tau + \vDash [(0,1):\{右:左\circ次\}]$
- したがって、τ’⊢S5.帰結、すなわち、
  - $\tau' \vdash \tau \vDash [(0,1):\{右:左\circ次\}]$

言い換え問題の証明に対する考察

- 内包や等価性を定義して、主題の異なる情報の言い換えが成立すること、を証明できた
- 未だこのような言い換えの証明が、「なぜそれで証明したと言えるのか」は説明されていない。
- 次は以下の問題を取り扱う
  - τ’＝「τが正しいことの証明」、とおく
  - τ, τ’, τ’’, …を無限に取れるための条件を示せ

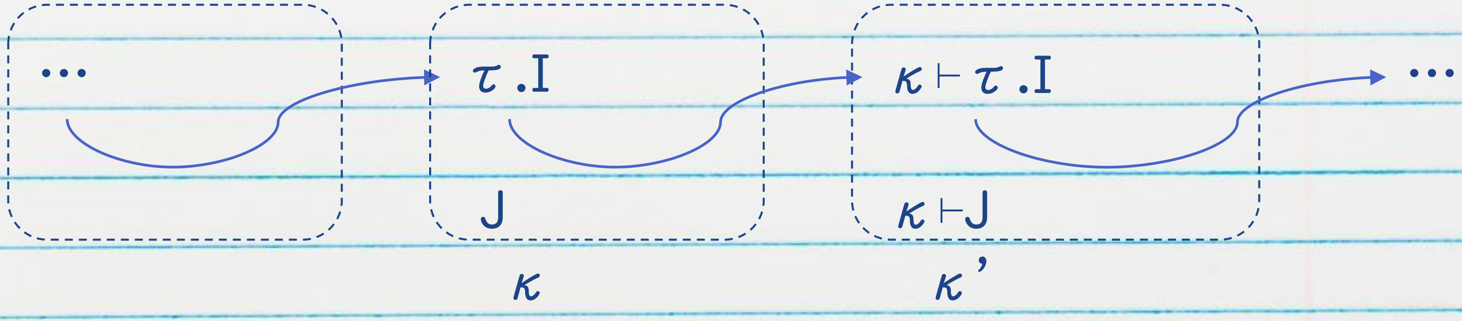
証明の証明の証明の…

- 証明自体はきりがない
  - $\tau \vdash 1+1=2$
  - $\tau' \vdash \tau \vdash 1+1=2$
  - $\tau'' \vdash \tau' \vdash \tau \vdash 1+1=2$
  - …
- 系列τ, τ', τ'', …に着目する

$1+1=2$	$\tau \vdash 1+1=2$	$\tau' \vdash \tau \vdash 1+1=2$	…
τ	τ'	τ''	

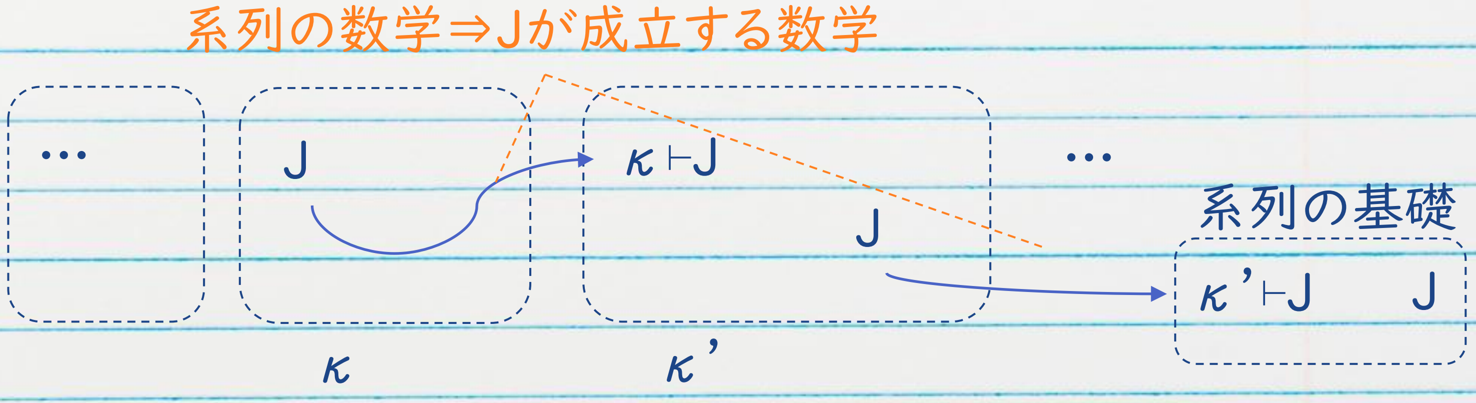
数学系列の特徴

- 系列の途中の隣接する組(κ, κ')
  - κ'では、κで成立する情報を推件の帰結とする情報が成立する
  - $\kappa \subset \kappa$'でも$\kappa \supset \kappa$'でもない
  - τに依存する情報とそうでない情報がある



数学の基礎付け

- κでτ非依存情報Jが成立するとき、κ’でκ⊢Jが成立
  - この証明の根拠は、τが関与しない
  - κやκ’独自の情報では証明の正当性が損なわれる
  - 「系列の数学⇒Jが成立する数学」という形の根拠



さいじゃくのすうがくΩ

- あらゆる数学の基礎となる数学Ωを考える
  - 数学非依存な情報Jのみを含む
  - $\{J\ s.t.\ \Omega \vDash J\} \Rightarrow \{J\ s.t.\ \Omega \vDash$(任意の数学⇒Jが成立する数学)$\}$
  - $\Omega \vDash$(任意の数学$\Rightarrow \{\phi\ s.t.\ \Omega \subset \phi\}$)
- Ωを「さいじゃくのすうがく」とよぶ

$\Omega \subset$ τ, τ', ..., 他

数学非依存情報の例(1)

- 情報[a : X]
  - {I *s.t.* (I.主題=a) ∧ (I.条件=X)}⇒=[a:X]
  - ただし、(=x) = {y *s.t.* y=x}
- 組(a,b)
  - {t *s.t.* (t.左=a) ∧ (t.右=b)}⇒=(a,b)
- 属性a.R
  - {A *s.t.* [A : R.項] ∧ [a : A.(˜R)]}⇒=a.R
  - ただし、˜R = R.帰属元

数学非依存情報の例(2)

- 成立 $\phi \vDash I$
- 含意X⇒Y (=[(a,b):左が右を含意])
  - 左が右を含意={(X,Y) *s.t.* ⊨[a:X]⇒⊨[a:Y]}
  - ただし、⊨[c:Z]={ϕ *s.t.* ϕ⊨[c:Z]}
- 等価a=b (=[(a,b):左右が等しい])
  - 左右が等しい={(a,b) *s.t.* a⋖b∧b⋖a}
  - ただし、a⋖b=任意の条件⇒{X *s.t.* ⊨[a:X]⇒⊨[b:X]}

内包の定義の変形(1)

- β で一時変数xを主題とする情報は γ でも証明できる
- 証明できるという関係は、一時変数xを削除して表現できる

	⊂	I=x.R [x : C1],[x : C2],…	=	[x : {x s.t. I}] [x : C1],[x : C2],…
α (xは未知)		$\beta = \alpha + \vDash$x.R		$\gamma = \alpha + \vDash$[x : {x s.t. I}]

{x s.t. I}

⇓ ⇘ …

C1 C2 …

内包の定義の変形(2)

- M=「$\beta=\alpha+\vDash$x.Rで成立するxを主題とする情報の条件」
- N=「[C : M]ならばB⇒CであるようなB」
- 上記M, Nを使うと、{x s.t. x.R}は以下で再定義できる
  - [{x s.t. x.R} : N]
  - [A : N]ならばA⇒{x s.t. x.R}

I=x.R

[x : C1],[x : C2],…

$\beta=\alpha+\vDash$x.R

$$
\begin{array}{ccccccc}
\multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hspace{12em}}^{N}} & & \\
\{x \text{ s.t. } I\} & \Leftarrow & A & & & \Rightarrow & X \\
\Downarrow & \Searrow & \cdots & \Swarrow & \Downarrow & & \\
\multicolumn{5}{c}{\underbrace{C1 \quad C2 \quad \cdots}_{M}} & &
\end{array}
$$

交わり

- 条件Mに対して、交わり∧Mを以下で定義する
  - [∧M : M.全含]、そして、M.全含⇒{A *s.t.* A⇒∧M}
  - ただし、M.全含={N s.t. M⇒{C *s.t.* N⇒C}}
- また、M=(条件K、Lのどちらか一方に等しい)に対して、
  - ∧M=K∧Lと書く

$$\begin{array}{cccccc} \wedge M & & \Leftarrow & & A & \Rightarrow X \\ \Downarrow & \searrow & \cdots & \swarrow & \Downarrow & \\ \multicolumn{3}{l}{\underbrace{C1\ \ C2\ \cdots}_{M}} & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} K\wedge L & & \Leftarrow & & A & \Rightarrow X \\ \Downarrow & \searrow & & \swarrow & \Downarrow & \\ K & L & & & & \end{array}$$

内包の定義の変形(3)

- 情報I, Jに対して、情報Kと数学の条件⊨Kを同一視して
  - I∧J=⊨I∧⊨Jと定める(右辺が交わり)
  - 左辺は、「I、そして、J」と同義
- {x *s.t.* x.R}も情報の属性x.Rを数学条件の属性⊨x.Rと同一視しているとみなす
- 数学条件の属性Φ=x.Γに対し、内包{x *s.t.* Φ}を以下のように定義する
  - xが未知であるような数学αに対し、{x *s.t.* Φ}＝∧{C *s.t.* α+x.Γ⊨[x : C]}

未知変数

- 「xが未知であるような数学」という条件を、∀xで表す
  - (ϕ, o).充足$=\{C \text{ s.t. } \phi \vDash [o:C]\}$
  - $\forall x = \{\alpha \text{ s.t. } (\alpha, x)$.充足$\Rightarrow (\alpha, o)$.充足$\}$

(α,x).充足

[x : C]

[y : C] [z : C] ⋯

α (xは未知)

(α,x).充足

⇓ ⇘ ⋯

(α,y).充足 (α,z).充足 ⋯

y,z,...は任意のもの

内包の定義の変形(4)

- 内包‡Γ={x *s.t.* x.Γ}は以下のように書ける
- ∀x⇒{α *s.t.* ‡Γ=∧{C *s.t.* α+x.Γ⊨[x : C]}}

⊂ [x:C1] [x:C2] … = ‡Γ=∧{C …}

⇓ ⇘ …

C1 C2 …

[α : ∀x]　　α+x.Γ　　α+⊨[x : ‡Γ]

普遍汎化

- △△である○○を考えて、[○○ : □□]が証明できるとき、△△⇒□□を得るような証明を普遍汎化とよぶ
- 推移律の証明での例
  - [a : X]が成立するϕを考える
    - a=b、b=cを根拠に、$\phi \vDash$[c : X]
  - したがって、$\vDash$[a:X]⇒$\vDash$[c:X]
- ∀xとして、情報の属性x.R, x.Sについて普遍汎化は、以下のような数学の条件の含意で表現できる
  - $\{\alpha \text{ s.t. } (\alpha + \vDash x.R) \vdash x.S\} \Rightarrow \vDash (‡R \Rightarrow ‡S)$

普遍汎化の証明

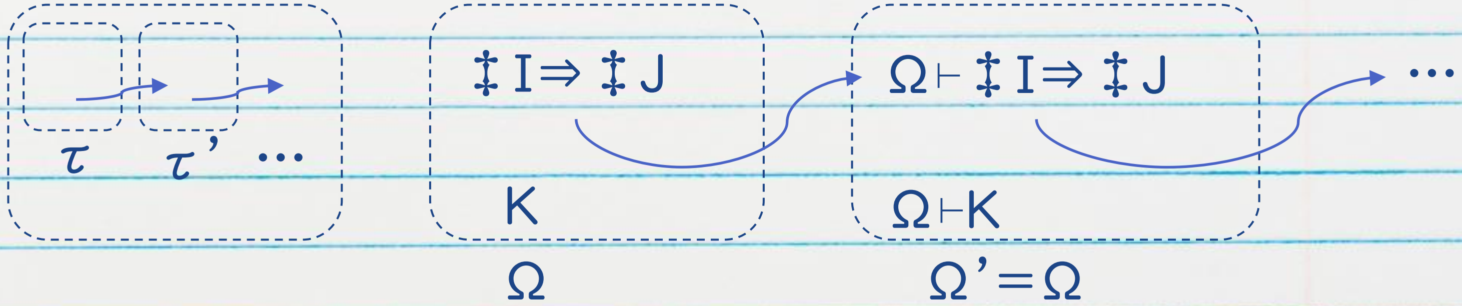
- (α+⊨x.R)⊢x.Sが成立するような数学ϕを考える
  - (α+⊨x.R)⊨x.S、そして、α⊂α+⊨x.R、であるから、(+⊨).定義より、α+⊨x.S⊂α+⊨x.R
  - (α+⊨x.S)⊨[x:C]、であるような条件Cを考える。
    - ⊂.定義より、(α+⊨x.R)⊨[x:C]
    - ‡Rの∧.定義より、‡R⇒C
  - よって、[‡R : {C s.t. (α+⊨x.S)⊨[x:C]}.全含]
  - ‡Sの∧.定義より、‡R⇒‡S
- ϕに関する普遍汎化より、以下の普遍汎化が得られる
  - {α s.t. (α+⊨x.R)⊢x.S}⇒⊨(‡R⇒‡S)

さいじゃくのすうがくに対する考察

- さいじゃくのすうがくΩを定義
  - $\Omega \vDash$(任意の数学$\Rightarrow \{\phi \ s.t.\ \Omega \subset \phi\}$)
- さいじゃくのすうがくで交わりを定義し、内包も数学非依存の情報として定義できることを示せた
- 「普遍汎化」がΩの定義または「普遍汎化」を使って証明できた
  - 普遍汎化の証明が無限に続けられることを示している
- 次は以下の問題に取り組む
  - 1+1=2の証明が無限に続けられることを証明せよ
- 注意：普遍汎化は従来「公理」として扱われている

さいじゃくのすうがくによる証明

- 数学τの完全な証明＝系列τ, τ’, τ’’, …が取れること
  - 証明が無限に続けられる、ということ
- さいじゃくのすうがくΩの定理だけを使っていれば証明は無限に続けられる
  - τに関する普遍汎化をΩで証明する



証明図式

- 推件[x : A⊢B]を以下図式で表す

$$\frac{[x\colon A]}{[x\colon B]}A \Rightarrow B$$

- 前提･根拠は
  - 他の推件の帰結と=なら矢印で接続
  - 定義であれば○で囲む

$$\frac{I}{J}I.\text{条件} \Rightarrow J.\text{条件}$$

※J=A⇒Bとする

$$\frac{[x\colon A]}{[x\colon B]}A \Rightarrow B \qquad \frac{J}{K}J.\text{条件} \Rightarrow K.\text{条件}$$

図式の省略(1)

- 上辺と下辺の主題が異なる推件の省略記法を用いる
  - 言い換え←→を使った省略
  - 内包{y s.t. y.R}を使った省略

$$\frac{\mathrm{I}}{J} I \longleftrightarrow J \qquad \frac{[x{:}A]}{x.R} A \Rightarrow \{y\ s.t.y.R\} \qquad \frac{x.R}{[x{:}B]} \{y\ s.t.y.R\} \Rightarrow B$$

$$\frac{J}{I} I \longleftrightarrow J \qquad \frac{x.R}{x.S} \{y\ s.t.y.R\} \Rightarrow \{y\ s.t.y.S\}$$

図式の省略(2)

- 交わり∧を使った接続の省略

$$
\begin{tikzcd}
\dfrac{I}{J}\, I \longleftrightarrow J \arrow[dr] & & \dfrac{I}{K}\, I \longleftrightarrow K \arrow[dl] \\
& \dfrac{J \land K}{L \land M}\, J \land K \Rightarrow L \land M \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\dfrac{L}{P}\, L \longleftrightarrow P & & \dfrac{M}{Q}\, M \longleftrightarrow Q
\end{tikzcd}
$$

1+1=2の普遍汎化

- 以下の情報Iをすべて定義するような数学($\{\tau$ *s.t.* $\tau \Vdash I\}$)
  - [0 : 空数], [1 : 0.次], [2 : 1.次]
  - 任意の組⇒{(a,b) *s.t.* (a,b).前定義}
    - (a,b).前定義=[a : b.前]←→[b : a.次]
  - 任意⇒{a *s.t.* a.空和定義}
    - a.空和定義=空数⇒{b *s.t.* a+b=a}
  - 任意の組⇒{(a,b) *s.t.* (a,b).組和定義}
    - (a,b).組和定義=a.次⇒{c *s.t.* b.前⇒{d *s.t.* a+b=c+d}}
- ⇒$\{\tau$ *s.t.* $\tau \vdash (1+1=2)\}$

1+1=2+0

$$\cfrac{\cfrac{[2:1.次]}{1.前 \Rightarrow \{d\ s.t.1+1=2+d\}}\ 1.次 \Rightarrow \{c\ s.t.1.前 \Rightarrow \{d\ s.t.1+1=c+d\}\}}{}$$

$$\cfrac{[(1,1):任意の組]}{(1,1).組和定義}\ 任意の組 \Rightarrow \{(a,b)\ s.t.(a,b).組和定義\}$$

$$\cfrac{[(0,1):任意の組]}{(0,1).前定義}\ 任意の組 \Rightarrow \{(a,b)\ s.t.(a,b).前定義\}$$

$$\cfrac{[1:0.次]}{[0:1.前]}\ [0:1.前] \longleftrightarrow [1:0.次]$$

$$1.前 \Rightarrow \{d\ s.t.1+1=2+d\}\ \cfrac{[0:1.前]}{1+1=2+0}$$

2+0=2

$$\frac{[2:\text{任意}]}{2.\text{空和定義}}\ \text{任意} \Rightarrow \{a\ s.t.\ a.\ \text{空和定義}\}$$

$$\frac{[0:\text{空数}]}{2+0=2}\ \text{空数} \Rightarrow \{b\ s.t.\ 2+b=2\}$$

推移律

$$\dfrac{a = b}{a \prec b \land b \prec a}\ \text{=. 定義} \qquad \dfrac{b = c}{b \prec c \land c \prec b}\ \text{=. 定義}$$

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vDash [a{:}X]}{\varphi \vDash [b{:}X]}\, a \prec b \qquad \dfrac{\varphi \vDash [b{:}X]}{\varphi \vDash [c{:}X]}\, b \prec c}{a \prec c}\ \text{普遍汎化} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\cdots}\, c \prec b \qquad \dfrac{\vdots}{\cdots}\, b \prec a}{c \prec a}\ \text{普遍汎化}$$

$$\dfrac{a \prec c \land c \prec a}{a = c}\ \text{=. 定義}$$

$$\dfrac{a = c}{\{(a,c)\, s.t.\, a = b \land b = c\} \Rightarrow \{(a,c)\, s.t.\, a = c\}}\ \text{普遍汎化}$$

$$\dfrac{\{(a,c)\, s.t.\, a = b \land b = c\} \Rightarrow \{(a,c)\, s.t.\, a = c\}}{\text{任意} \Rightarrow \{b\ s.t. \{(a,c)\, s.t.\, a = b \land b = c\} \Rightarrow \{(a,c)\, s.t.\, a = c\}\}}\ \text{普遍汎化}$$

1+1=2

$$\frac{[2+0:\text{任意}]}{\{(a,c)s.t.a=2+0\wedge 2+0=c\}\Rightarrow\{(a,c)s.t.a=c\}}\text{推移律}$$

$$1+1=2+0 \qquad\qquad 2+0=2$$

$$\frac{1+1=2+0\wedge 2+0=0}{1+1=2}\{(a,c)s.t.a=2+0\wedge 2+0=c\}\Rightarrow\{(a,c)s.t.a=c\}$$

最後の考察

- 証明を無限に続けられることを「完全な証明」とよぶ
- 示したい数学の普遍汎化がΩ上での定理になることが、完全な証明の十分条件
- 1+1=2の普遍汎化をΩ上で証明できた
- 1+1=2を完全に証明できた

注意事項

- 以降では、本研究の内容を一般に言われている研究成果と紐づけて理解するために、対比を示す
- ただし、筆者が一般に言われている研究成果を正しく理解していないことにより、間違った解釈を含んでいる可能性が高いことに注意を要する
- 関係する話題の用語を把握する目的でのみ使用できる
- 誤りがある場合、指摘大歓迎です

従来の数学との関連(1)

- 情報[x : A]を主題xと条件Aで表すアイディアはフレーゲ(Friedrich Ludwig Gottlob Frege)にはじまる(1879)
- 「述語論理」と呼ばれる体系では一般にxを集合の要素、Aを命題関数とし、命題に真偽値(2値論理)もしくは様相を表す値(多値論理)を割り当てる
- ラッセル(Bertrand Arthur William Russell)は性質Aから、Aを条件とする情報が成立するようなxを要素として含む集合{x|[x:A]}を構成する操作を許容すると、A=「自分自身を要素として含まない集合」としたとき矛盾を生じることを示唆した。「ラッセルのパラドックス」と呼ばれる

従来の数学との関連(2)

- ラッセルのパラドックス「N={y|¬(y∈y)}が矛盾を引き起こす」を言及するには、以下の論理が必要となる
  - x∈N、であるか、x∉N、であるかのどちらかが成立する
  - 実際N∈NとN∉Nは(成立するなら)同時に成立する
- 通常、上記の公理は明に示されていない。同等な記述は、
  - 外延性公理∀A,∀B,(∀x,(x∈A⇔x∈B)⇒ A=B)
  - コントラクションを含むため、矛盾を引き起こす(グリシン,1974)
- コントラクション: (A→(A→C))→(A→C)
  - Cに⊥を代入し、¬A=A→⊥とすると、(A→¬A)→¬A

従来の数学との関連(3)

- 従来の数学では、xを要素として含む集合{x|[x:A]}を構成する操作は、その定義をもつ数学が矛盾する可能性があるので、矛盾しないような構成の集合だけに制限している
- 本発表での議論は、完全な証明を与えているが、この「矛盾がない」という意味での健全な証明を与えている訳ではない。矛盾が入っている場合、すべての主張が成り立つから1+1=2が成り立っているだけかもしれない
- 健全さを保つために許される、「xを要素として含む集合{x|[x:A]}を構成する操作」の範囲は完全には分かり切っていない

従来の数学との関連(4)

- 本発表での議論がラッセルのパラドックスにより破綻している訳ではない
- ラッセルのパラドックスと同等の定義を[X:N]←→(⊨[X:X]→⊨I)のような形でつくることができ、このような定義を作ればあらゆる情報Iが成立する
- 上記の普遍汎化をΩ上で証明できるが、Ω上で上記のような定義をしている訳ではない
- あくまで「証明を無限に続けられるか」に着目しているのであり、考えられるあらゆる定義を形式に沿って生成するような行為を考えている訳ではない