

Brieskorn多様体とMilnor 7 球面

Tomoki Oda

March 21 2021

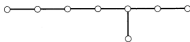
1. 分野

2. Second Section

- 特異点論
- 発表内容の結果としては微分トポロジーっぽい話です
- 僕自身は代数幾何の勉強をしています
- なので代数幾何っぽい話からしていきたいと思います。後半はトポロジーの話に移りたいと思います。でも最後にまた代数幾何の話もするかもしれません。

5.8. *A surface singularity.* Let k be an algebraically closed field, and let X be the surface in \mathbf{A}_k^3 defined by the equation $x^2 + y^3 + z^5 = 0$. It has an isolated singularity at the origin $P = (0,0,0)$.

- (a) Show that the affine ring $A = k[x,y,z]/(x^2 + y^3 + z^5)$ of X is a unique factorization domain, as follows. Let $t = z^{-1}$; $u = t^3x$, and $v = t^2y$. Show that z is irreducible in A ; $t \in k[u,v]$, and $A[z^{-1}] = k[u,v,t^{-1}]$. Conclude that A is a UFD.
- (b) Show that the singularity at P can be resolved by eight successive blowings-up. If \tilde{X} is the resulting nonsingular surface, then the inverse image of P is a union of eight projective lines, which intersect each other according to the Dynkin diagram E_8 :



Here each circle denotes a line, and two circles are joined by a line segment whenever the corresponding lines intersect.

Note. This singularity has interesting connections with local algebra, invariant theory, and topology.

In case $k = \mathbf{C}$, Mumford [6] showed that the completion \hat{A} of the ring A at the maximal ideal $\mathfrak{m} = (x, y, z)$ is also a UFD. This is remarkable, because in general the completion of a local UFD need not be UFD, although the converse is true (theorem of Mori)—see Samuel [3]. Brieskorn [2] showed that the corresponding analytic local ring $\mathbf{C}\{x, y, z\}/(x^2 + y^3 + z^5)$ is the *only* nonregular normal 2-dimensional analytic local ring which is a UFD. Lipman [2] generalized this as follows: over any algebraically closed field k of characteristic $\neq 2, 3, 5$, the only nonregular normal complete 2-dimensional local ring which is a UFD is $k[[x, y, z]]/(x^2 + y^3 + z^5)$. See also Lipman [3] for a report on recent work connected with UFD's.

This singularity arose classically out of Klein's work on the icosahedron. The group I of rotations of the icosahedron, which is isomorphic to the simple group of order 60, acts naturally on the 2-sphere. Identifying the 2-sphere with $\mathbf{P}_\mathbf{C}^1$ by stereographic projection, the group I appears as a finite subgroup of $\text{Aut } \mathbf{P}_\mathbf{C}^1$. This action lifts to give an action of the binary icosahedral group \tilde{I} on \mathbf{C}^2 by linear transformations of the complex variables t_1 and t_2 . Klein [2, I, 2, §13, p.62] found three invariant polynomials x, y, z in t_1 and t_2 , related by the equation $x^2 + y^3 + z^5 = 0$. Thus the surface X appears as the quotient of $\mathbf{A}_\mathbf{C}^2$ by the action of the group \tilde{I} . In particular, the local fundamental group of X at P is just \tilde{I} .

With regard to the topology of algebraic varieties over \mathbf{C} , Mumford [6] showed that a normal algebraic surface over \mathbf{C} , whose underlying topological space (in its “usual” topology) is a topological manifold, must be nonsingular. Brieskorn showed that this is not so in higher dimensions. For example, the underlying topological space of the hypersurface in \mathbf{C}^4 defined by $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ is a manifold. Later Brieskorn [1] showed that if one intersects such a singularity with a small sphere around the singular point, then one may get a topological sphere whose differentiable structure is not the standard one. Thus for example, by intersecting the singularity

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^{2k-1} = 0$$

in \mathbf{C}^5 with a small sphere around the origin, for $k = 1, 2, \dots, 28$, one obtains all 28 possible differentiable structures on the 7-sphere. See Hirzebruch and Mayer [1] for an account of this work.

特異点周りの幾何学

ここすべての変数を \mathbb{C} と考えます。次元というと実次元で考えます ($2 \times$ 実次元=複素次元)

定義

特異点とは多項式 $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ の偏微分がすべての変数において消えるもの。具体的にいくつか例を見ていきましょう。

Examples

$y^2 = x^3$ は明らかに原点に特異点を持っている(教科書的な例)(実次元2)

Examples

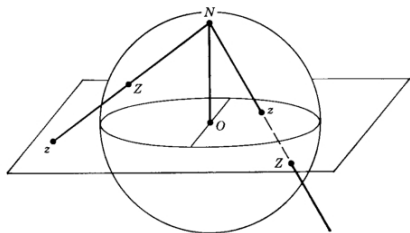
$xy = y^2$ も原点に特異点をもってる

特異点を知りたい場合局所的な考察をすると面白いことが起こることがある。

特異点周りの幾何学

構成

四次元球面を複素数を使って $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = \epsilon\}$ こう表します。
これを三次元に落とし込みます。これは複素解析でリーマン球面のステレオグラフ射影の三次元版を考えます



(2次元のステレオグラフ射影の図)

構成

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{\epsilon \operatorname{Re}(x)}{\epsilon - \operatorname{Re}(y)}, \frac{\epsilon \operatorname{Im}(x)}{\epsilon - \operatorname{Re}(y)}, \frac{\epsilon \operatorname{Im}(y)}{\epsilon - \operatorname{Re}(y)} \right) (\operatorname{Re}(y) \neq \epsilon) \quad (1)$$

$$(x, y) = \infty (\operatorname{Re}(y) = \epsilon) \quad (2)$$

逆写像は

$$(u, v, w) \rightarrow \left(\frac{2\epsilon(u + iv)}{u^2 + v^2 + w^2 + \epsilon^2}, \frac{u^2 + v^2 + w^2 - \epsilon^2 + 2wi\epsilon}{u^2 + v^2 + w^2 + \epsilon^2} \right) \quad (3)$$

$$\infty \rightarrow (0, \epsilon) \quad (4)$$

で一対一対応となり、いい感じに4次元球面は3次元+無限遠点だとわかりました。

前の例に戻ります

特異点周りの幾何学

Examples

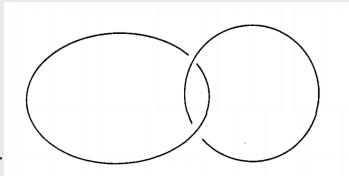
$xy = y^2$ は複素数直線 $y=0$ と $x=y$ の和です（代数幾何的に言うとReducibleな多様体になります。）こいつと先ほどの複素球面は計算したらわかることですが、三次元座標では

$$\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : w = 0, u^2 + v^2 = \epsilon\} \quad (5)$$

と

$$\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : v = w, (u - \epsilon)^2 + 2v^2 = 2\epsilon^2\} \quad (6)$$

の和。つまり円と楕円の絡み目となります。ここでは絡み目という言葉はどう縮ませて



もお互いを交差せずに一点にできない図形のことを言います

特異点周りの幾何学

もう一つの方の例を見てみましょう。

Examples

$y^2 = x^3$ はどの点も (s^2, s^3) と書けます。つまり、円の方の座標で考えると $|x|^2 + |y|^2 = \epsilon$ なので $|s| = \delta$ とすると δ は $\delta^4 + \delta^6 = \epsilon$ を満たす唯一の実数となり、円と代数曲線の交点は $S = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : (\delta^2 e^{2it}, \delta^3 e^{3it})\}$ となります。

これは $T = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| = \delta^2, |y| = \delta^3\}$ の部分集合となりますが。実は構成で話したステレオグラフ射影を使うとトーラスに射影されることがわかります。これを見ていきましょう。

特異点周りの幾何学

Examples

ステレオグラフ射影によれば T は

$$2\epsilon^2\sqrt{u^2 + v^2} = \delta^2(u^2 + v^2 + w^2 + \epsilon^2) \quad (7)$$

となりますが整理すると

$$(\sqrt{u^2 + v^2} - \delta^{-2}\epsilon^2)^2 + w^2 = \epsilon^2\delta^2 \quad (8)$$

となりますが、これはおなじみの円

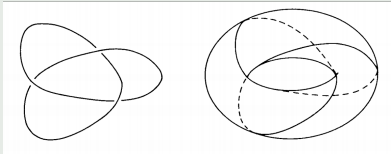
$$(v - \epsilon^2\delta^{-2})^2 + w^2 = \epsilon^2\delta^2 \quad (9)$$

の w 軸に対する回転、つまりはトーラスとなります。

特異点周りの幾何学

Examples

さらにこの特異点周りの集合 S は最も簡単な非自明な結び目である三葉結び目であるこ



とがわかります。

トラス上にピッタリくっつく結び目のことを言うみたいです (ういきぺでいあ)

この例では曲線が一回転してるうちに x 軸で二回転、 y 軸で三回転してるので三葉結び目といいます

トラス結び目ともいわれてト

ほかの例は??

一つ例を見つけると一般化したくなるのが数学者の性(サガ)!!

特異点周りの幾何学

問題は特異点の周りの考察です。特異点は昔からいろいろな人を魅了してきました。(Newton, Zariski, Abhyankar, Hironaka, Thom, Arnold)。
簡単のため2変数で考えてみましょう。 $f(x, y) = x^p + y^q$ はほぼ自明に原点に特異点を持ちます。もし仮に p と q がお互いに素ならば次の結果がわかります。

Brauer 1928

$V = f^{-1}(0)$ と S_ϵ の交点は (p, q) 型のトーラス結び目となる。

証明自体は簡単な定理ですが、理論的に興味深いと思います。結び目の補空間の基本群はふつう非自明なので特異点の周りに結び目があると基本群が非自明になることが想像つくと思います。これのアイデアは一般化されて代数幾何でのあるクラスの環から生成される特異点の存在を基本群で判定できることをMumfordやBrieskornは証明しました。

Mumford

有理二重特異点 if and only if 局所基本群が有限群

Durfeeはこんな感じで有理特異点に関する15の同値な性質を論文でまとめました。



業績

- 商特異点と同時特異点解消←大体この辺
- 単純特異点とリー環の関係性
- エキゾチック球面の位相←次これ
- ローレンツ幾何学

特異点周りの幾何学

問題

特異点から考えられる結び目の高次元類似物は何か？

特異点周りの幾何学

自然な発想としてこの例を一般化したいと思います。抽象化するとどいういことが言えるでしょうか？まず \mathbb{C} を値にとる多項式である。 $f(x_1 \dots x_{n+1})$ ということがいえそうです。(Brieskorn多項式のアイデア)

今考えたいのは $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$ となる $(x_1 \dots x_{n+1})$ の集合なので $f^{-1}(0)$ を考えることに等しいと思います。これと半径 ϵ の円との交点を考える→局所的な考察がこの発表の主にやりたいこととなります

が仮にここで0が特異点でなかったとしましょう。Preimage theoremという(僕はLevel set theoremと覚えてました)定理によって滑らかな写像の逆像は実 $2n$ 次元多様体となり、そしてその S との交点は(交わることによってさらにLevelSetがしていされるので超平面の超平面となり) $2n-1$ 次元となります。さて、これは球面の部分集合なので当然正則で $2n-1$ 次元の球面と微分同相になります。実はこの集合は $2n+1$ 次元の球面に結び目なしで埋め込まれてることがモース理論を使うことによって証明されることがわかります!!

高次元化

これから特異点というとしてすべて孤立特異点のことを指します。

今論じてた特異点と結び目の理論の高次元化はBrieskornとMilnorによって大体基礎が作られました。

S_ϵ についてですが一般に ϵ を超平面 $V = f^{-1}(0)$ と横断的に交わるようにとれることが証明できます。横断的という単語がわからなければ重解がないという風に受け取ってくれていいです

今まで結び目という単語を感覚的に使ってきましたがじゃあそもそも結び目とはなんぞや？という話です

形式的な定義

結び目とは円周の三次元球面への埋め込みのことを言う

僕は結び目とは何か？というので余次元2現象の一つだと考えています。次のスライドではこの余次元2現象の例をいくつか見ていきながら結び目の高次元化を目指していきたいと思います

余次元2

低次元トポロジー

手術理論 → 余次元2以上で埋め込まれたら多様体を手術できる

可環論・代数幾何

正規特異点 → 正規環の代数多様体の特異点は高々余次元2である

複素幾何学・多変数複素解析

Hartog (ハルトーク) 現象(可除特異点定理) → S が余次元2以上なら M/S の正則関数は一
意に M に正則に延長できる

代数幾何・トポロジー

d 重分岐被覆とは余次元2のCW複体 $R_\pi \subset Y$ で固有射 $\pi : X \rightarrow Y$ が
 $\pi : X - \pi^{-1}(R_\pi) \rightarrow Y - R_\pi$ で d 重被覆であるものである

Brieskorn多様体

このように数学では余次元2で様々な興味深い現象が起こります。なので結び目は当然一般化されるなら S^{2n+1} に埋め込まれた $L_V \cong S^{2n-1}$ と考えるのが自然です。この結果を目指しましょう。

Brieskornは $f(z_1 \dots z_{n+1}) = z_1^{a_1} + \dots + z_{n+1}^{a_{n+1}}$ ($a_i \geq 2$)の形の多項式の特異点を調べました。

$f(z_1 \dots z_{n+1}) = 0$ を満たす集合 V は複素 n 次元の超曲面となりますが $L_V = V \cap S_\epsilon$ を考えます。これからこの L_V を特異点の(一般的に)リンクと呼びますがBrieskorn多項式のリンクをBrieskorn多様体と呼びます。

Remark

リンクは今の時点では結び目とも絡み目とも違う概念です。

Brieskorn多様体はなぜ興味深いかというと多くの場合(後述するようにアレクサンダー多項式によって)トポロジー球面となり具体的になんかしらのポアンカレ予想の反例を見つけることが多々あるからです

Milnor Fibration

Milnorは(特異点作られるHyperplaneとは)逆に非特異な集合と特異点の関係性について調べ具体的に元の多様体のトポロジーについて調べました。

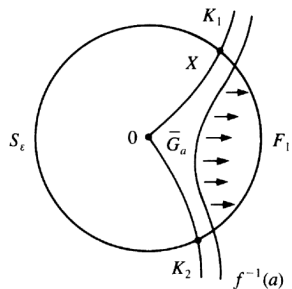
注意

ここでは f はBrieskorn多項式とは仮定してません。特異点のある解析関数だとなんでもいいです

$$\pi = \frac{f}{|f|} : S_\epsilon - L_V \rightarrow \mathbb{S}^1 \quad (10)$$

ミルナーが証明したことはこれはトポロジカルにはファイバーになっているということです。(Milnor fibration)。つまりこれの逆写像 $\pi^{-1}(e^{i\theta})$ が各点で多様体となり円でパラメータづけられてることがわかります。証明にはEhresman fibration theoremを使います
図形的に考えると S は半径の $2n+1$ 次元の球面はリンクを境界とした $\pi^{-1}(e^{i\theta})$ の逆像で分解されます

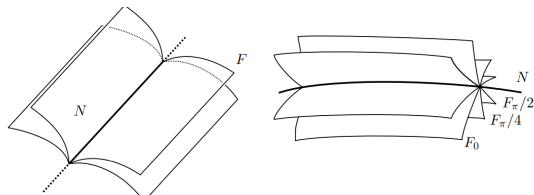
Fibrationとは？



この図はこの境界で有名なものですが、説明すると0で尖ってる図形が特異点を持つ集合である $K_1 \cup K_2 = L_V$ という解釈になります。

とするとうまい感じに摂動を施して $\frac{f(z_1 \dots z_{n+1})}{|f(z_1 \dots z_{n+1})|} = e^{i\theta}$ となる $(z_1 \dots z_{n+1})$ を探してみた感じですね。各ファイバーは(孤立特異点の時) $2n$ 次元の境界付き平行化可能多様体となり境界はリンク L_V となります。

Milnor fibration



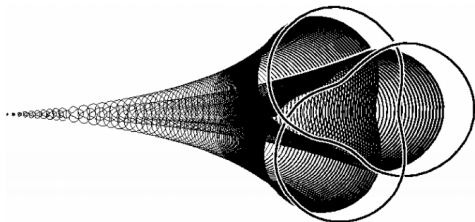
この構造はトポロジーをやっている人たちからはOpenbook decompositionといわれるものの例になってます。簡単に言うと S は $2n-1$ 次元の多様体になりますが、それを $2n-3$ 次元のリンク(トポロジーではバインドと呼ばれます)を境界としてるファイバー $F_\theta = \pi^{-1}(e^{i\theta})$ (トポロジーの言葉ではページと呼ばれます)に分解されます。すべてのページはお互いに微分同相です。3次元や結び目に詳しい人はここでピンと来るかもしれませんがオープンブック分解にはモノドロミーというページの境界を動かさない自己同型写像が定義されそれがのちに重要になります

錘定理

Examples

結び目の言葉に翻訳するとこうなります。 $f = x^2 + y^3$ の特異点周りのミルナーファイブレーションは三葉結び目のファイバー結び目を構成する
→多項式と微分トポロジーの知識で結び目理論の結果!!

補足ですがミルナーは更にリンクの連続的な構造も調べました。今までは球面との交差はようになるだろう？と現れたのがリンクでしたが球と交差させた特異点を持つ超曲面はトポロジー的にはリンクの錘になることが示されました



Milnor exotic sphere

ミルナーのほかの偉業にミルナー7球面があります。こちらのほうがよく知られてるかもしれませんが、簡単に説明しようと思います
ポアンカレ予想にはいくつかのクラスがあります。ホモトピー球面なら同相か？というのが一般に言うポアンカレ予想です。
実はポアンカレ予想の最もナイーブな形はこうです

conjecture

(ポアンカレ予想の原型) 2次元ホモロジー球面なら同相か？

実はこれは偽です。反例は実はポアンカレによって見つけられてます(後で話します。これもBrieskorn多項式として現代では解釈されます)なのでホモトピー球面に関する問題がポアンカレ予想と呼ばれるようになりました

Milnorの7球面というのはある種のポアンカレ予想に関する反例、ホモトピー球面なら微分同相か？という問題に関する特殊な次元での反例のことです(ちなみにBriekorn多項式を使えば1次元や5次元のエキゾチック球面も調べられます!!)

Brieskorn-Hirzurbch)

Milnor exotic sphere

ミルナーは1956年にモース理論、特製類、Hirzbruchの符合定理、Hopf束の知識を使い28個のエキゾチック球面の構成をしました。つまり当時のトポロジーの知識を総動員して証明された最先端の定理というわけです。この結果で彼は1961年にフィールズ賞を受賞しています。

微分ポアンカレ予想についてまとめます・

微分ポアンカレ予想

微分ポアンカレ予想は1、2、3次元については真（単連結なら微分同相である）4次元は未解決問題、5次元以上で微分ポアンカレ予想が正しいのは61以下の数に対して、5、6、12、56、61次元である。

KervaireとMilnorは1963年に n において微分ポアンカレ予想が正しくない場合Exotic Sphereは有限個しかないことを証明しました($n=7$ の時は28個のExotic sphere、 $n=11$ の時は992個のExotic sphere”しか”ありません)

Brieskornは1966年に多くのExotic球面はBrieskorn多様体として実現可能だと証明しました。

リンクはホモトピー球面？

そしてさらにHirzbruch(代数幾何で有名なドイツの数学者です(Hirzbruch Riemann-Rochの定理、巡回特異点の解消問題))がにすべてのMilnor Exotic 球面はBrieskorn多様体であると証明しました！

BrieskornとHirzbruchはどうやって微分ポアンカレ予想について調べたのでしょうか？そのためにはリンクに対するトポロジカルな考察が必要になります。

3次元の時はアレクサンダー多項式は3次元の時ファイバー結び目から（三次元オープンブック分解から）そのモノドロミー作用の行列式としてアレクサンダー多項式が定義されます。（具体的に言うと L_V が結び目でオープンブック分解の F_1 の自己同型作用 h から誘導されるホモロジーの作用 $h_* : H_1(F_1) \rightarrow H_1(F_1)$ の行列式 $\Delta(t) = \det(tI_* - h_*)$ ）と定義され $|\Delta(1)| = 1$ という性質を持ちます

→ミルナーファイブレーションによってオープンブック分解が与えられてるので自然とアレクサンダー多項式の高次元類似物が考えられる!! これによればアレクサンダー多項式の類似物 $|\Delta_f(1)| = 1 \rightarrow L_V$ はホモトピー球面であることが証明されてる!!

リンクはホモトピー球面？

これで多くの場合のBrieskorn多項式がホモトピー球面であることが実際にBrieskorn多項式のアレクサンダー多項式の類似物によりわかります。

Brieskorn多項式 $f(z_1 \dots z_N) = z_1^{a_1} + \dots + (z_{n+1})^{a_{n+1}}$ のアレクサンダー多項式は $\Delta(t) = \prod(t - \omega_1 \dots \omega_{n+1})$. ω_j は1の a_j 乗根

Brieskorn-MilnorのExotic Sphere

$a^2 + b^2 + c^2 + d^3 + e^{6k-1} = 0$ ($k = 1 \dots 28$)と10次元 S_e 球面との交点はホモトピー球面となり各 k が違えば微分同相でない

Examples

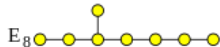
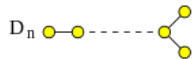
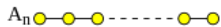
一般化された三葉結び目 $a_1 \dots a_n = 2, a_{n+1} = 3$ を考えたときにアレクサンダー多項式は n が奇数の時は $\Delta(t) = t^2 - t + 1$ で偶数の時は $t^2 + t + 1$ となり $2n-1$ 次元の時だけトポロジカル球面になります。実は9次元の時は球面と微分同相とならずKervaireのエキゾチック9球面の例となることがわかっています

リンクはホモトピー球面？

実際にホモトピー球面であるという事実から28個の異種球面が示されるのはたくさんのステップがあるので(特性類の計算)ここでは置いておきます余談ですがアレクサンダー多項式の計算にはヴェイユゼータ関数とも関係するみたいなので面白い話題は尽きないと思います

曲面の特異点

Brieskorn多項式は低次元だと特に代数幾何と結びつきが強くなります(McKay対応)ここでは曲面の特異点がどのようにトポロジカルな帰結を導いてくれるのか見ていきたいと思えます代数幾何になじみの深い人は $z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0$ の方程式の意味が分かるかもしれません。これは2次元の二重有理特異点となっています。Dynkin図形でいうとE8となりま



す。

この二重有理特異点自体、商特異点だとかDu val特異点だとかクライン特異点とかいろいろ呼ばれてます (代数幾何では)

Poincare Homology Sphere

この定理は特異点とリンクの関係性が注目されるきっかけとなったものの一つです

Mumford 1961

3次元ホモトピーポアンカレ予想は結び目を使って否定的解決はできない

似たような定理でこういうことも言えます(ちょっと強いかもしれません)

Theorem

$n \neq 2$ の時リンク (Brieskorn多様体と限らないリンク) はホモロジー球面と同じホモロジーの時 S^{2n-1} と同相、逆も言える。

ちょっとがっかりですが、 $n \neq 2$ のホモロジー球面であるがホモトピー球面でない例がさっきから仄めかしてる2重有理特異点の方程式となるわけです。

Poincare Homology Sphere

Proposition

Brieskorn多様体として $f(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0$ はホモロジー球面である

理由

アレクサンダー多項式を計算してみたら $\Delta_f(t) = \frac{(t^{30}-1)(t^5-1)(t^3-1)(t^2-1)}{(t^{15}-1)(t^{10}-1)(t^6-1)(t-1)}$ となるので $\Delta(1) = 1$ である。

反例

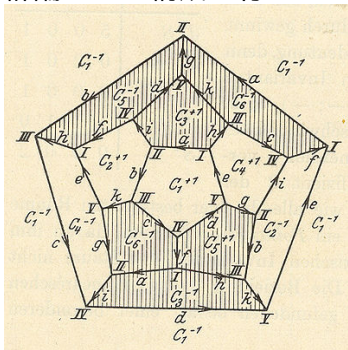
しかしこの例はホモトピー球面ではない

説明

代数幾何(可換環)の知識により S/\tilde{G} と同相になる (\tilde{G} は二重正二十面体群という $SU(2)$ の中に存在する正二十面体群の二重被覆)。しかし普遍被覆の理論により $\pi_1(S/\tilde{G}) \cong \tilde{G}$ となります。

Poincare Homology Sphere

群論っぽい構成を行いました。幾何学的な構成もできます。



正12面体で書かれてるローマ数字を同一視すればこの空間ができることをポアンカレが示しました

まとめ&発展

- 特異点はトポロジカルな視点をするだけでいろいろな数学とつながる(実はこの結果の多くは代数幾何の言葉でも翻訳することができ混合Hodge構造という数学にもつながるそうです)
- これをきっかけに特異点に興味を持ってくれると嬉しいです

The End