

すうがく徒のつどい@オンライン (2021年3月20・21日)

『可算無限人の囚人と, 2人の囚人』

アブストラクト

@souji04261

1 2つのパズル

本発表では以下のような論理パズルを囚人と帽子のパズルと呼びます。

看守があるゲームをするため2人の囚人を同じ部屋に入れ、帽子を1人に1つずつ被せます。その帽子は黒白どちらかの色で塗られています。そして2人とも自分が被っている帽子の色は分かりませんが、もう1人の囚人の帽子の色は見えています。また部屋に入ってから互いに一切のコミュニケーションが取れません。この状態で帽子の色のどちらかのみを、つまり「黒」か「白」のみを2人同時に発言させ、その発言とその発言者が被っている帽子の色が一致していれば正解となり、そんな正解者が1人でもいれば囚人側の勝利として2人とも釈放されます。もし2人とも不正解ならば囚人側の敗北・看守側の勝利として2人とも処刑されます。当たり前ですが看守がどのように帽子を被せるかは、囚人たちが入室以前に分かることはありません。このゲームのルールや勝利条件については、部屋に入る前に囚人たちに看守から伝えられ、ゲーム開始までに2人で戦略を相談することが可能です。このとき入室後にどのように帽子の被せられても、常に1人以上が正解する戦略は存在するでしょうか？

このパズルの答えは「そんな戦略が存在する」です。つまり囚人側には処刑を免れる必勝戦略があります。どのような戦略かは頭の体操として是非解いてみてください。このようなパズルを以降簡単に帽子パズルと呼ぶことにします。

他にも囚人の数や囚人たちに被せる帽子の色の候補を3つ以上に変えたり、今回のように囚人全員が自分以外の全ての帽子が見えるわけではなかったり、答え合わせのための発言を全囚人同時にしなくても良かったり、また要求される正解者数を変えたりと様々なバリエーションがあります。

続けて悪魔とチェス盤のパズルと呼ばれる、もう1つのパズルを紹介します。このパズルも釈放・処刑をかけて囚人たちが看守と勝負するゲームに挑みます。

2人の囚人がいて、看守が囚人たちへゲームを挑みます。そのゲームの内容とは、まず1人の囚人と看守が部屋に入ります。その部屋には1つのチェス盤と、マスの数と同じだけの、つまり64枚の裏表が分かるコインがおいてあります。看守は全てのコインを1つずつ1つのマスに裏表が分かるように置いていきます。全てのコインが置かれた盤面を一緒に入室した囚人に見せ、さらにその後、いずれかのマスを1つ指差します。そのあと囚人はコインを1枚だけ裏表を入れ替え、その後退室します。続けてもう1人の囚人が入室しコインの置かれたチェス盤を見て、看守が先ほどの囚人に対して指差したマスはどれかと問われます。そのマスを言い当てることのできたならば囚人側の勝利として2人とも釈放されます。それが出来なければ看守側の勝利として2人とも処刑されます。もちろんどちらの囚人が先入室するか、看守がどのようにコインを並べるか、どのマスを指差すかは、入室する前に囚人が知ることはできません。また先入室した囚人は必ず1枚のコインを裏返さなくてははいけません。しかしこのゲーム開始前にこれまでのルールは看守から囚人たちに伝えられ、2人で戦略を練ることができます。このときどちらの囚人が先入室しても、どんな風にコインを並べられても、どのマスを看守が指さしても、後に入室した囚人がそのマスを言い当てることのできるような戦略は存在するでしょうか？

このパズルにも囚人側に必勝戦略が存在します。

このパズルでは異なるバリエーションはあまり話題にはなりません。例えばチェス盤でなかったら、つまり8×8個のマスの数でなかったら、各マスに置くものが2面のものでなかったら、例えば6面のサイコロであったなら、みたいな形で一般化したパズルを考えることができます。

2 これまでの講演内容と今回の講演内容

修士2年ころから囚人や帽子の色の数を無限にした帽子パズルを主な研究テーマとしています。無限化した場合は、無限を研究対象の1つとする数学基礎論・数理論理学, その中でもとくに公理的集合論の, 知識やテクニックを応用することができます。ゆえに現在, 集合論研究者の研究室に所属しています。そもそも集合論研究者が日本には少なく, さらに無限化した帽子パズルを研究している学生は(おそらく)日本には自分しかいないと思います。似たような専門分野の方と話すことはおろか, 他の専門分野の方へ研究内容を共有する機会も(コロナ禍ではとくに)少なくなりました。そんな中ある程度の時間を使って研究内容について発表できるこういった機会はありがたく, これまで2度ほど帽子パズルをテーマに講演させていただきました。

第11回関西すうがく徒のつどいにおいては「無限帽子パズルと選択公理」という題で講演しました。アブストラクトはこちら⇒ <http://kansaimath.tenasaki.com/wp/wp-content/uploads/2018/09/souji04261.pdf>

そして第12回関西すうがく徒のつどいにおいては「無限帽子パズルと位相空間論」という題で, 位相空間論の知識を使って解ける無限帽子パズルの結果について講演しました。アブストラクトはこちら⇒ <https://kansaimath.tenasaki.com/wp/wp-content/uploads/2019/09/souji04261.pdf>

今回は以前の発表をさらに発展させ, 帽子パズル以外の数学パズルの無限化, その一例として上記の悪魔のチェス盤パズルも同時に対象にしてみます。選択公理を仮定すれば無限化されたある帽子パズルにおいて囚人側が有利になることが知られています。この度, 無限化したある悪魔のチェス盤パズルにおいても, 選択公理を仮定すると囚人側が有利になることが分かりました。そしてさらなる考察によって, 無限化した帽子パズルとチェス盤パズルの間に, どちらも選択公理を使用する以上の関連性を発見しましたので, そちらもあわせて紹介する予定です。

2019年から2020年における私の研究結果を皆さんに発表して, 単なる数学パズルを無限化することの面白さを少しでも共有できれば嬉しいです。

3 前提知識と講演難易度

今回は, 定理や結果の紹介に時間を割いて深く多く説明できるよう, 紹介するすべての定理に関してきちんと証明していくことはしません(というより時間的に難しい)。パズルやその解法に関する定義や定理を述べるために必要な知識として, 学部1~3年生で扱うような以下のものを挙げています。今時点で思い浮かぶ使いそうな定義を挙げてみましたが, 細かい定義はまた増えるかもしれません。

1. 集合, とくに無限集合(可算・非可算)やその濃度
2. 写像, とくに写像の制限や写像の集合
3. 二項関係, とくに整列順序関係や同値関係・商集合
4. 数の2進数表現と2進数表現された数同士の演算
5. グラフ理論, とくに有向グラフ
6. 群論, とくに可換群, 剰余群

発展的な話題として数理論理学や公理的集合論が関わるパズルの結果も話そうかと思っています。アブストラクト提出時点ではどれくらい発展的な話題を出すか決めていませんが, 今のところ以下のようなものを含める予定です。

7. 集合論の公理系, とくにZFやZFCなど
8. 集合論の公理系における独立命題, とくに連続体仮説(どういう主張なのか, 独立命題であるとはどういうことなのかなど)
9. 選択公理(どのような主張なのか, 同値な命題としてどのようなものがあるかなど)
10. 弱い選択公理, とくに従属選択公理や可算選択公理など

以上のもの以外の公理的集合論に関する話題を出すことになってもなるべく解説するようにします。また10以外の話題に関しては初学者向けの読み物として[9], [10], [11]などがあります。公理的集合論に馴染みのない方はこの機会に是非手に取ってみてください。

公理的集合論に関する授業を学部にて行う大学は数少ない（少なくとも私は見聞きしたことはない）ので、それに触れる今回の発表の講演申し込み時に報告する講演難易度は「学部以上のレベル」としています。しかしパズルを無限化することや、そんなパズルにどのような戦略が存在するかという結果だけならば、大抵が抽象数学、素朴集合論や公理的集合論の知識を用いずとも述べることができます。パズルがどのように研究されてきたかや自分が興味を持っていることなども話してみたいので、前提知識として挙げたものについて知らなくとも気軽に発表を聞きにきてもらえれば嬉しいです。

4 パズルに関する参考文献の紹介とおススメ情報

[4] は無限帽子パズルに関する現在最も網羅的なテキストです。ただ今回の発表においてはほんの 10 ページ分くらいの情報しか引用しませんし、そもそも読むのが價格的にも内容的にも大変だと思います（自分もまだ全部読んでないです）。なので同じ作者たちが書いた無限帽子パズルと選択公理に関する入門的な内容をまとめた記事が公開されています。それが [3] です。無限帽子パズルについて日本語で読める文献はまだまだ少なく、書籍としては [8] だけ、そして帽子パズルを扱っているのも本の中の一部です。しかし今回の発表にて紹介する選択公理と関係する結果の丁寧な解説と証明が載っています。帽子パズルについて知りたい場合は、まずはこちらを読んでもいいかもしれません。今回の発表内容を部分的に含むものとして、M2 時代に書いた [13] も共有しておきます。今回はこれらに加えて新たな研究成果を引用しようと思っています。それが [7] で、[6] は arXiv にアップロードしたほぼ同じ内容のものです。

悪魔のチェス盤パズルについては体系的な研究はまだほとんどされていません。まず 1 節で出題したパズルの解き方を図付きで丁寧に解説した WEB 記事として [1] が、この記事を日本語意識した WEB 記事 [2] もあります。また有限な範囲で一般化したこのパズルについて考察したものとして論文ではありませんが [5] があります。

今回発表する無限化された悪魔のチェス盤パズルに関する結果として [12] がありますが、まだ速報しか公開されてません。そちらは <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/2164.html> から『Devil's infinite chessboard puzzle under a weaker choice principle』という論文をご覧ください。

参考文献

- [1] Impossible escape?, 12 2014. <http://datagenetics.com/blog/december12014/index.html>.
- [2] 論理クイズ「2人の囚人とチェス盤」解説英文の意識, 11 2016. <https://sist8.com/64coins>.
- [3] Alan D. Taylor Christopher S. Hardin. An introduction to infinite hat problems. *Mathematical Intelligencer*, 2008. <https://www.cs.umd.edu/~gasarch/TOPICS/hats/infinite-hats-and-ac.pdf>.
- [4] Alan D. Taylor Christopher S. Hardin. *The Mathematics of Coordinated Inference*. Springer International Publishing, 2013.
- [5] Pau Cantos Coll. Coding theory in a life or death problem, 2018.
- [6] Masaru Kada and Souji Shizuma. Strategic equivalence among hat puzzles of various protocols with many colors, 2019.
- [7] Masaru Kada and Souji Shizuma. Strategic equivalence among hat puzzles of various protocols with many colors. *Mathematical Logic Quarterly*, Vol. 66, No. 3, pp. 295–299, 2020.
- [8] 田中一之. チューリングと超パズル: 解ける問題と解けない問題. 東京大学出版会, 2013.
- [9] 竹内外史. 新装版 集合とはなにか—はじめて学ぶ人のために. 講談社, 5 2001.
- [10] 志賀浩二. 無限への飛翔 集合論の誕生 (大人のための数学 3). 紀伊國屋書店, 2 2008.
- [11] 寺澤順. 現代集合論の探検. 日本評論社, 5 2013.
- [12] 嘉田勝, 静間荘司. Devil's infinite chessboard puzzle under a weaker choice principle (set theory and infinity). 数理解析研究所講究録.
- [13] 嘉田勝, 静間荘司. Some remarks on infinite hat guessing games (recent developments in axiomatic set theory). 数理解析研究所講究録, Vol. 1988, , 4 2016.