Hilbertの第14問題に対するRoberts型の反例

龍孫江 ／ 可換環論bot

@ron1827 ／ @CommAlg_bot

1900年の国際数学者会議において，David Hilbert は20世紀の数学界が取り組むべき課題として23の問題を提示した．連続体仮説，算術の公理と無矛盾性に始まる問題群の範囲は多岐にわたり，数学の進むべき指針として重要な役割を果たしてきた．今回は第14問題について取り上げたい．

問題 1 (Hilbert の第14問題)**.** K を体，$E := K(x_1, \ldots, x_n)$ を K 上の n 変数有理関数体とする．拡大 $K \subset E$ の任意の中間体 L に対し，$L \cap K[x_1, \ldots, x_n]$ は K 上有限生成か？

問題文には直接は現れていないが，この問題は不変式論と密接な関係がある．$S := K[x_1, \ldots, x_n]$ の K 同型からなる群 G を考えよう．このとき，不変環 S^G の有限性について以下の問題が想起される：

問題 2 (不変式論の基本問題)**.** (1) 有限個の不変式 $f_1, \ldots, f_s$ をうまくとって，任意の $f \in S^G$ が $f_1, \ldots, f_s$ の K 係数多項式として表せるようにできるか？
(2) (1) が成り立つとする．このとき，$f_1, \ldots, f_s$ が充たす代数関係式は本質的に有限個に限られるか？

Hilbert は可換環のイデアルの有限性を巧みに用いて，当時としては極めて一般的な状況下でこの問題を肯定的に解決した．結果もさることながら，計算によって具体的に生成系や関係式を与えていない点でも画期的な解決であった．当時の数学者には，この議論を見て「神学だ」と嘆じたものもあったと伝えられている．

第14問題から基本問題は次のように導かれる．G の作用は E へと自然に拡張され，$L = E^G$ を不変体とすれば $L \cap S$ は不変環 S^G に一致する．第14問題が肯定的ならば，この形の不変環は総て K 上有限生成であり，不変式論の基本問題は肯定的に解決される．

しかしながら，1958年に第14問題は永田雅宜によって否定的に解決された [1]．この反例は群作用の観点からも大変整然としたものであった．

1990年，Roberts は永田とは全く別のアプローチから第14問題の反例を構成した．この画期的なアイデアをもとにして，第14問題に関する様々な（より条件の厳しい）例が構成されている．この講演では，不変環や代数の有限生成性，Hilbert の用いた技巧や結果などの基本事項から始めて，Roberts の反例の構成を中心にお話ししたい．

References

[1] Masayoshi Nagata, *On the fourteenth problem of Hilbert*, Proc. of the International Congress of Mathematicians 1958, Cambridge Univ. Press, London, New York, (1960), pp.459–462.

[2] Paul Roberts, *An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem*, J.Algebra, **132** (1990), pp.461–473.