

ロケールによる point-free topology

ぴあのん @piano2683

位相空間 X の開集合全体が成す順序集合を $\mathcal{O}(X)$ と表せば、連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し単調写像 $f^{-1}: \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ が定まる。よって、位相空間と連続写像の圏 \mathbf{Top} から順序集合と単調写像の圏 \mathbf{Pos} への反変関手 $\mathcal{O}: \mathbf{Top}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Pos}$ が得られる。まず次の問題を考えよう：

$\mathcal{O}(X)$ から X を復元することができるか？

ここで $\mathcal{O}(X)$ をフレーム (frame) という良い完備束、すなわちある種の“代数”構造と思えば、上の問題は数学でしばしば現れる“空間と代数の双対性”の枠組みで捉えることができる。実際、 \mathbf{Pos} の部分圏としてフレームとフレーム準同型の圏 \mathbf{Frm} を考えれば、ある反変関手 $\text{pt}: \mathbf{Frm}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Top}$ が存在して随伴

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O} & \\ \mathbf{Top} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \perp \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathbf{Frm}^{\text{op}} \\ & \text{pt} & \end{array}$$

を与える。この随伴の単位 $X \rightarrow \text{pt}(\mathcal{O}(X))$ が同相写像になるような X は **sober 空間** と呼ばれる。Hausdorff 空間やスキームなど多くの空間は sober なので、先程の問題は多くの場合に肯定的に解決できる。

さて、フレーム $\mathcal{O}(X)$ が空間 X についての多くの情報を持っているという事実に基づいて、一般のフレームそのものを“空間”と見なして位相空間論を展開する試みがある。このようなアプローチを、点集合論的な空間論と対比して、**point-free topology** (a.k.a. pointless topology) という。射の向きを \mathbf{Top} に合わせるために $\mathbf{Loc} = \mathbf{Frm}^{\text{op}}$ とおき、フレームを \mathbf{Loc} の対象と見なしたものを**ロケール (locale)** という。本講演では、ロケールによる point-free topology の枠組みにおいて、どの程度従来の位相空間論の類似を展開できるかを概説する。具体的には次のトピックについて話す：

- ロケールに対する“部分空間”の概念
- 位相空間の様々な性質に対応するロケールの性質について
- 位相空間の構成（直積・直和・コンパクト化など）に対応するロケールの構成について

また、point-free topology を考えることの大きな利点として、構成的数学やトポス理論といった弱い論理の上での数学と相性がいいことが挙げられる。従来の位相空間論では、Tychonoff の定理と選択公理が同値であることなど、非構成的原理を本質的に要求する場面が多くある。もし時間に余裕があれば、弱い数学では従来の空間概念がうまく振る舞わないことを紹介し、そうした数学においてロケールを用いることの利点について論じたい。

■前提知識・文献案内 本講演では、標準的な位相空間論（コンパクト性・分離公理など）および圏論（極限・随伴など）の知識を仮定する。束論や Stone 双対性（和書では [田中 00] がよい入門書である）に触れたこと

があるとなおよい。また、講演の序盤で触れる位相空間とロケールの双対性については [SGL] の IX 章が読みやすい。日本語の概説 [ぺ 18; ペ 19] もある。より本格的にロケール理論を学ぶには、point-free topology 以外の話題も盛りだくさんの古典的名著 [Joh82] や、比較的新しいモノグラフ [PP12] をおすすめする。

参考文献

- [Joh82] P. T. Johnstone. **Stone Spaces**. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 3. Cambridge University Press, 1982.
- [Joh83] P. T. Johnstone. “The Point of Pointless Topology”. In: **Bulletin of the American Mathematical Society** 8.1 (1983), pp. 41–53. DOI: 10.1090/S0273-0979-1983-15080-2.
- [Joh01] P. T. Johnstone. “Elements of the History of Locale Theory”. In: **Handbook of the History of General Topology**. Ed. by C. E. Aull and R. Lowen. Vol. 3. Springer, 2001, pp. 835–851. DOI: 10.1007/978-94-017-0470-0_2.
- [SGL] S. Mac Lane and I. Moerdijk. **Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory**. Universitext. Springer-Verlag, 1992. DOI: 10.1007/978-1-4612-0927-0.
- [PP12] J. Picado and A. Pultr. **Frames and Locales: Topology without points**. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser, 2012. DOI: 10.1007/978-3-0348-0154-6.
- [田中 00] 田中 俊一. **位相と論理**. 日評数学選書. 日本評論社, 2000.
- [ぺ 18] paper3510mm. “Pointless Topology 概説”. Aug. 29, 2018. URL: <https://paper3510mm.github.io/notes>.
- [ペ 19] paper3510mm. “Spectral 空間と分配束の Stone 双対性”. Dec. 7, 2019. URL: <https://paper3510mm.github.io/notes>.