

# 順序数を用いた理論の強さの解析について

Alwe

(twitter:@AlweLogic)

2021年1月6日

Gödel の不完全性定理によって、不完全性定理の仮定を満たすような理論に対し必ず独立命題が存在し、またその理論の無矛盾性は理論内で示せないことが分かる。このことから以下のような疑問が生ずるだろう。

1. 理論  $T$  に対して“自然な”独立命題としてどういうものがあるだろうか。
2. どのような理論が理論  $T$  の無矛盾性を証明可能か。無矛盾性を有限的に証明することはできるか。
3. 理論  $T$  の強さをなんらかの特徴付けをすることはできないか。

このような問に対し、形式化された証明の理論を構築することで解決を図る分野が証明論 (proof theory) である。

証明論に於いて最も基本的な定理である Gentzen のカット除去定理 (cut elimination theorem) は、形式的な証明にある種の正規形が存在し、また証明の正規形への変形を実効的な方法、すなわち正規化アルゴリズムを与えることで示した。この定理の系として Robinson 算術  $Q$  の無矛盾性が従う。この手法を推し進め、Gentzen は順序数  $\varepsilon_0$  ( $\omega^\alpha = \alpha$  となる最小の順序数  $\alpha$ ) までの超限帰納法を用い Peano 算術  $PA$  の証明に対する正規化アルゴリズムを見つけた。この事実から順序数と理論の形式的証明の構造にはなにかしらの対応が存在するというアイデアが生まれ、それを精緻化したのが理論  $T$  の不変量となる証明論的順序数 (proof-theoretic ordinal) である。

証明論の一分野である順序数解析 (ordinal analysis) では理論  $T$  の証明論的順序数を求め、証明構造を理解することを目的とする分野である。この講演では順序数解析の歴史的経緯から、順序数解析の結果として上述の問題の解決について、最近の順序数解析の結果を述べる。