Lefschetz の不動点定理と Reidemeister trace

kissshot@nolifequeen13

Abstract

Lefschetz の不動点定理とは，コンパクト連結多様体上の自己連続写像 f の Lefschetz 数 $L(f)$ が 0 でないならば f は不動点をもつというものであり，これはよく知られている Brouwer の不動点定理の拡張となっている．Lefschetz の不動点定理では不動点の存在のみに言及しており, 不動点の個数については言及していない．それに対して，f の Nielsen 数 $N(f)$ は不動点の個数の下界を与える．すなわち，$N(f) \leq \min\{\#\mathrm{Fix}(g) \mid f \simeq g\}$ が成り立つ．

$L(f)$，$N(f)$ の両方を含む不変量として Reidemeister trace が知られている．連結な有限 CW 複体 X 上の普遍被覆 $p : \tilde{X} \to X$ の被覆変換群を π とかくとき，$x \in X$，$\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ と X の自己連続写像 f のリフト $\tilde{f}$ に対して，群準同型 $\varphi : \pi \to \pi$ が f の基本群への誘導準同型 $\pi_1(f) : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, f(x))$ から誘導される．このとき，π の π 上の 左作用 φ-Reidemeister 作用が定まり，その軌道空間を $\mathcal{R}_\varphi[\pi]$ とおく．π の $\tilde{X}$ 上への作用によって，X の普遍被覆空間 $\tilde{X}$ の胞体チェイン複体 $C_*(\tilde{X})$ は $\mathbb{Z}[\pi]$-加群の構造をもち，チェイン写像 $\tilde{f}_\#$ は任意の $\alpha \in \pi$ に対して，$\tilde{f}_\#(\alpha\tilde{x}) = \varphi(\alpha)\tilde{f}_\#(\tilde{x})$ を満たす．f の Reidemeister trace $L_{(\pi,\varphi)}[C_*(\tilde{X}), \tilde{f}_\#] \in \mathbb{Z}\mathcal{R}_\varphi[\pi]$ はチェイン複体 $C_*(\tilde{X})$ に対する f の胞体近似写像の代数的トレースの交代和であり，この定義は f の胞体近似に依らない．

Wecken は Reidemeister trace を不動点指数と φ-Reidemeister 軌道によって表す公式を証明した．この公式により，Reidemeister trace に現れるすべての不動点指数の和は $L(f)$ に一致し，且つ Reidemeister trace に現れる 0 でない不動点指数を係数にもつ Reidemeister 軌道の個数は $N(f)$ に一致する．

本講演では前提知識としてホモロジー論の基本的事項 (例えば中岡稔著の位相幾何学程度) と被覆空間の基本的事項を仮定して，Lefschetz の不動点定理，及びその一般化である Reidemeister trace について述べたいと思います (余裕があれば一致点に関するトピックも紹介したい)．代数的トポロジー，位相的不動点理論の面白さを伝えられるよう努めます．